Eine elementargeometrische Eigenschaft von Verschlingungen und Knoten

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung der Doktorwürde
genehmigt von der
Philosophischen Fakultät
der Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin
von

Erika Pannwitz
aus Hohenlychen

Tag der Promotion: 12. Juli 1933

Tag der mündlichen Prüfung: 18. Juni 1931

Verlagsbuchhandlung Julius Springer in Berlin
1933

548

Referenten: Professor Dr. H. Hopf

Professor Dr. E. Schmidt

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Sonderabdruck aus „Mathematische Annalen“, Band 108, Heft 5

Einleitung[1]).

An Modellen von Knoten und von verschlungenen Kurven lassen sich in den der Anschauung zugänglichen einfachen Fällen die beiden folgenden Sätze immer bestätigen:

(A) Sind die beiden zueinander fremden einfach geschlossenen Kurven A und B im dreidimensionalen euklidischen Raume R^3 miteinander verschlungen, so gibt es stets wenigstens eine Gerade, die jede der beiden Kurven A und B zweimal schneidet, und zwar in der Reihenfolge B, A, B, A.

(B) Zu jedem im dreidimensionalen euklidischen Raume R^3 gelegenen Knoten K gibt es wenigstens eine Gerade, die K viermal schneidet.

Kurvenpaare, die im anschaulichen Sinne unverschlungen sind, und unverknotete Kurven lassen sich so deformieren, daß Geraden mit den genannten Schnitteigenschaften nicht existieren. Man muß also das notwendige Auftreten solcher Geraden als durch die Verschlingung bzw. Verknotung bedingt ansehen. Im folgenden wird es sich darum handeln, genauere Aussagen über die Schnittgeraden von verschlungenen Kurvenpaaren und von verknoteten Kurven zu gewinnen. Dem Wesen dieses Problems dürfte diejenige Formulierung am besten angemessen sein, die den „Verknotungen" und „Verschlingungen" den Begriff der Isotopie, d. h. der eineindeutigen stetigen Deformation, zugrundelegt. Da aber eine befriedigende Behandlung eineindeutiger Deformationen bisher nicht möglich ist, muß unter den vorhandenen Verschlingungsbegriffen und Knotendefinitionen eine andere unserer Beweismethode angemessene Aus-

[1]) Die vorliegende Arbeit bildet den Inhalt meiner Dissertation (Universität Berlin, 1931). Die beiden Bemerkungen (A) und (B), die den Anlaß zu der Arbeit gegeben haben, verdanke ich Herrn O. Toeplitz.

wahl getroffen werden. Bevor die Hauptsätze formuliert werden, stellen wir daher unter a) die einschränkenden Voraussetzungen zusammen, die wir immer machen werden, und die sich im wesentlichen auf die „allgemeine Lage" beziehen, besprechen dann — unter b) — in gebotener Ausführlichkeit die verschiedenen Möglichkeiten für die Definition der Verschlingung, um schließlich unter Benutzung eines bestimmten dieser Begriffe den Hauptsatz I auszusprechen, der die obige Aussage (A) präzisiert; sodann wird — unter c) — der für die Behauptung (B) geeignete Knotenbegriff eingeführt und diese Behauptung in verschärfter Form als Hauptsatz II formuliert; in d) wird über Verallgemeinerungen gesprochen.

a) Wir stellen uns im folgenden auf den Standpunkt der *kombinatorischen* Topologie: Kurven sind Polygone; dabei gehört jede Polygonecke zu höchstens zwei Seiten. Flächenstücke sind aus ebenen Dreiecken aufgebaut; jede Seite gehört zu höchstens zwei Dreiecken, und die Dreiecke mit einer gemeinsamen Ecke lassen sich (zyklisch oder linear) so anordnen, daß in der Anordnung jedes Dreieck genau einmal vorkommt und zwei aufeinander folgende Dreiecke eine Seite gemeinsam haben. Diejenigen Seiten, die zu genau einem Dreieck gehören, bilden den Rand des Flächenstücks. Ist insbesondere das Flächenstück E das eindeutige simpliziale Bild einer geeignet triangulierten Dreieckscheibe, so heißt E ein Elementarflächenstück; E wird von dem Bild der Dreieckseiten berandet.

Ist ein aus endlich vielen Polygonen und Flächenstücken bestehendes Gebilde im R^3 gegeben, so wird, da häufig Anzahlen von Schnittpunkten zu bestimmen sind, von vornherein die Voraussetzung der *allgemeinen Lage* gemacht: es sollen nicht mehr als drei Eckpunkte des Gebildes in einer Ebene liegen; zwei Seiten des Gebildes können also nur dann einen Punkt, und zwar einen Eckpunkt, gemeinsam haben, wenn sie entweder Seiten desselben Polygons oder Seiten der Triangulation desselben Flächenstücks sind. Durch beliebig kleine Verrückung der Ecken des Gebildes lassen sich diese Bedingungen immer erfüllen. Die Voraussetzung der allgemeinen Lage verbietet für Polygone das Auftreten von Doppelpunkten; Flächenstücke können dagegen Selbstdurchdringungen aufweisen. Die Anzahl der Schnittpunkte eines Polygons mit einem Flächenstück ist stets endlich; denn ein Schnittpunkt ist immer innerer Punkt sowohl der Polygonseite als auch des Dreiecks des Flächenstücks. Wenn eine Polygonseite mehrere Dreiecke eines Flächenstücks in demselben Punkte schneidet, so ist dieser Schnittpunkt mit der entsprechenden Vielfachheit zu zählen. Im allgemeinen werden absolute Schnittzahlen, d. h. Anzahlen von Schnittpunkten ohne Vorzeichen, gezählt. Wenn einmal bei orientierten Flächenstücken und orientierten Polygonen Schnittpunkte

mit einem (in bekannter Weise festgelegten) Vorzeichen berücksichtigt werden sollen, so wird dies durch die Bezeichnung „algebraische Anzahl" der Schnittpunkte hervorgehoben.

Sind A und B zwei einfach geschlossene, zueinander fremde Polygone, so gibt es unter den von A berandeten Elementarflächenstücken solche, deren absolute Schnittzahl mit B möglichst klein ist; diese Schnittzahl nennen wir die „für ein von A berandetes Element notwendige Schnittzahl mit B". Die Begriffsbildung hat auch dann einen Sinn, wenn A mit B identisch ist, wenn also die Schnittpunkte von A mit den Dreiecken der von A berandeten Elementarflächenstücke gezählt werden; in diesem Falle reden wir von der „für ein von A berandetes Element notwendigen Anzahl von Randsingularitäten".

Für die Ausführung von Deformationen sind in der Theorie der Knoten und Verschlingungen bekanntlich besondere Vorsichtsmaßregeln erforderlich. P sei ein einfaches (offenes oder geschlossenes) Polygon im R^3, f_t $(0 \leqq t \leqq 1)$ eine vom Parameter t stetig abhängende Schar von eindeutigen stetigen Abbildungen von P in den R^3. P_t bzw. $\mathfrak{p}_t$ bzw. p_t bedeute das Bild des Polygons P bzw. der Polygonseite $\mathfrak{p}$ bzw. des Punktes p bei der Abbildung f_t. Die Abbildungsschar f_t $(0 \leqq t \leqq 1)$ heißt eine *Deformation* von P, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. $p_0 = p$ für jeden $p \subset P$. 2. Es gibt eine von vornherein feste Unterteilung $\overline{P}$ von P, so daß ein Punkt p_t von P_t nur dann Ecke von P_t ist, wenn p_0 Ecke von $\overline{P}$ ist; das Bild p_t einer Ecke p_0 von $\overline{P}$ heißt auch dann Ecke von P_t, wenn p_t nur scheinbarer Eckpunkt ist, d. h. wenn die beiden an p_t anschließenden Seiten von P_t sich zu einer Strecke zusammenschließen. 3. Die Längen der Polygonseiten $\mathfrak{p}_t$ bleiben für alle t $(0 \leqq t \leqq 1)$ oberhalb einer festen positiven Schranke. Während der Deformation von P darf die Bedingung der allgemeinen Lage zeitweise verlorengehen; doch wird sie für das Anfangsstadium P_0 und das Endstadium P_1 — eventuell nach Weglassung scheinbarer Eckpunkte — als erfüllt angenommen.

Unter einer Deformation eines Paares von einfachen zueinander fremden Polygonen A, B wird eine Abbildungsschar f_t verstanden, die auf A und auf B definiert und auf jedem der beiden Polygone eine Deformation ist. Im folgenden nehmen wir, wenn von einer bestimmten Deformation die Rede ist, A und B schon in der für die Deformation ausreichenden Unterteilung an. Wir sagen, daß A und B durch die Deformation f_t $(0 \leqq t \leqq 1)$ „voneinander befreit werden", wenn A_1 und B_1 im R^3 durch eine Kugelfläche voneinander getrennt werden können. Zur Abzählung der bei einer Befreiung von A und B auftretenden Durchdringungen von A und B ziehen wir nur „Deformationen

mit endlicher Durchdringungszahl" in Betracht. Das sind solche Deformationen, bei denen 1. für jeden t-Wert der Durchschnitt $A_t \cdot B_t$ aus höchstens endlich vielen Punkten besteht und 2. höchstens für endlich viele t-Werte der Durchschnitt $A_t \cdot B_t$ nicht leer ist. Ein Punkt des Durchschnitts $A_t \cdot B_t$, durch den m Seiten von A_t und n Seiten von B_t hindurchgehen[2]), stellt eine $m \cdot n$-fache Durchdringung von A und B bei der Deformation f_t dar. Die Gesamtanzahl der bei einer Deformation f_t mit endlicher Durchdringungszahl für $0 \leqq t \leqq 1$ in den Durchschnitten $A_t \cdot B_t$ auftretenden Punkte, mit der richtigen Vielfachheit gezählt, nennen wir die Anzahl der Durchdringungen von A und B bei der Deformation f_t. Offenbar können — auch unter einschränkenden Voraussetzungen, wie Verbot von Selbstdurchdringungen, d. h. Eineindeutigkeit der Abbildungen f_t auf A und auf B einzeln für alle t, oder Festhaltung eines Polygons, z. B. $A_t = A$ für alle t — die Polygone A und B stets durch Deformationen mit endlicher Durchdringungszahl voneinander befreit werden. Unter allen derartigen Deformationen, die die Befreiung von A und B leisten, gibt es solche, bei denen die Anzahl der Durchdringungen von A und B ein Minimum ist. Die für die Befreiung von A und B erforderliche Mindestanzahl von Durchdringungen von A und B heiße die „zur Befreiung notwendige Durchdringungszahl von A und B".

b) Für die Definitionen der Verschlingung zweier zueinander fremder einfach geschlossener Polygone A und B stehen folgende Möglichkeiten zur Verfügung:

Definition I: *Die Homologieverschlingung*[3]). Die Homologieverschlingungszahl des orientierten Polygons A mit dem orientierten Polygon B ist die algebraische Anzahl der Schnittpunkte von B mit einem von A berandeten orientierbaren und gemäß der Orientierung von A orientierten Flächenstück. A heißt mit B unverschlungen, falls die Verschlingungszahl von A mit B Null ist; anderenfalls heißt A mit B verschlungen.

Wenn A mit B unverschlungen ist — und natürlich nur dann —, gibt es bekanntlich ein von A berandetes (nicht notwendig einfach zusammenhängendes) orientierbares Flächenstück, das zu B fremd ist.

---

[2]) Wenn p_t Eckpunkt von A_t oder von B_t ist, hat man statt der durch p_t hindurchgehenden Seite das Seitenpaar mit der gemeinsamen Ecke p_t zu nehmen.

[3]) Der Begriff der Homologieverschlingung ist in wesentlich größerer Allgemeinheit von L. E. J. Brouwer, 1912, Proc. Amst. **15**, S. 113—122, eingeführt worden. In dieser Arbeit finden sich die im folgenden genannten Eigenschaften der Homologieverschlingung, insbesondere auch die Unabhängigkeit der bei der Definition der Homologieverschlingungszahl auftretenden algebraischen Schnittpunktzahl von der Wahl des von A berandeten orientierten Flächenstücks.

Ferner weiß man, daß die Homologieverschlingung symmetrisch ist: die Verschlingungszahl von A mit B ist gleich der Verschlingungszahl von B mit A. Es hat also einen Sinn zu sagen, daß A und B im Homologiesinn „miteinander" verschlungen sind.

Definition II: *Die symmetrische Homotopieverschlingung.* Die symmetrische Homotopieverschlingungszahl von A und B ist die zur Befreiung durch beliebige Deformationen notwendige Durchdringungszahl von A und B. A und B heißen unverschlungen, wenn die Verschlingungszahl Null ist; anderenfalls heißen A und B miteinander verschlungen.

Es ist bekannt, daß zwei Polygone, die im Homologiesinn miteinander verschlungen sind, auch im Sinne der symmetrischen Homotopie miteinander verschlungen sind. Die vollständige Äquivalenz dieser beiden Verschlingungsdefinitionen und damit ein Zusammenhang zwischen Homologie- und Homotopieeigenschaften von Kurven im R^3 wird gesichert durch

Satz I: *Zwei Polygone, die im Sinne der Homologie miteinander unverschlungen sind, sind auch im Sinne der symmetrischen Homotopie unverschlungen.* (Beweis: § 1.)

Zusatz: *Die symmetrische Homotopieverschlingungszahl ist gleich dem absoluten Betrag der Homologieverschlingungszahl.* (Beweis: § 1.)

Definition III: *Die unsymmetrische Homotopieverschlingung.* Die unsymmetrische Homotopieverschlingungszahl ${}_A v_B$ von A mit B ist die zur Befreiung durch Deformationen unter Festhaltung von B notwendige Durchdringungszahl von A und B oder, was dasselbe ist, die für ein von A berandetes Element notwendige Schnittzahl mit B. A heißt mit B unverschlungen, wenn ${}_A v_B = 0$ ist; anderenfalls heißt A mit B verschlungen. — Entsprechend wird die Verschlingungszahl ${}_B v_A$ und die Verschlingung von B mit A definiert.

Für die unsymmetrische Homotopieverschlingung gilt der

Satz II: *Die formal unsymmetrische Homotopieverschlingung ist tatsächlich unsymmetrisch.* (Beweis: § 1, Beispiel 1.)

Aus der Definition geht unmittelbar hervor, daß jede der beiden unsymmetrischen Homotopieverschlingungszahlen mindestens gleich der symmetrischen Homotopieverschlingungszahl ist. Insbesondere ist also sowohl A mit B als auch B mit A im Sinne der unsymmetrischen Homotopie verschlungen, wenn A und B im Sinne der symmetrischen Homotopie miteinander verschlungen sind. Indessen folgt schon aus Satz II, daß die beiden Definitionen nicht äquivalent sein können. Es gilt sogar der

Satz III: *Es gibt Paare von Kurven, die im Sinne der symmetrischen Homotopie — und somit im Sinne der Homologie — unverschlungen*

sind, von denen aber jede mit der anderen im Sinne der unsymmetrischen Homotopie verschlungen ist. (Beweis: § 1, Beispiel 2.)

Der Unterschied zwischen der symmetrischen und der unsymmetrischen Homotopieverschlingung beruht auf der Existenz von Knoten. Ist B unverknotet[4]), so ist nämlich, wie man weiß, A dann und nur dann homotop Null in $R^3 - B$, wenn A in $R^3 - B$ homolog Null ist. Es gilt also der

1. Zusatz zu Satz III: *Ist B unverknotet und sind A und B im Sinne der Homologie oder (was nach Satz* I *dasselbe ist) der symmetrischen Homotopie miteinander unverschlungen, so ist auch A mit B im Sinne der unsymmetrischen Homotopie unverschlungen.*

Genauer gilt der

2. Zusatz zu Satz III: *Ist B unverknotet, so ist die unsymmetrische Homotopieverschlingungszahl ${}_Av_B$ von A mit B gleich dem Betrage der Homologieverschlingungszahl, also nach dem Zusatz zu Satz* I *gleich der symmetrischen Homotopieverschlingungszahl von A und B.* (Beweis: § 1.)

Daraus folgt insbesondere: *Für unverknotete Polygone A und B sind Homologieverschlingung, symmetrische und unsymmetrische Homotopieverschlingung miteinander identisch.*

Definition IV: *Die Isotopieverschlingung.* A und B heißen im Sinne der Isotopie miteinander unverschlungen, wenn die zur Befreiung durch Deformationen ohne Selbstdurchdringungen notwendige Durchdringungszahl von A und B gleich Null ist; anderenfalls heißen A und B miteinander verschlungen.

Es hat wenig Wert, für die Isotopieverschlingung ebenso wie bei den Definitionen II und III die zur Befreiung notwendige Durchdringungszahl von A und B als Verschlingungszahl einzuführen, weil zur Beschreibung der Verschlingung neben den gegenseitigen Durchdringungen von A und B bei der Befreiung auch Selbstdurchdringungen von A und von B zu berücksichtigen sind.

Es ist bekannt, daß man bei den unter a) getroffenen Festsetzungen jede eineindeutige Deformation eines Polygons zu einer eineindeutigen Deformation des ganzen Raumes in sich erweitern kann. Daraus folgt unmittelbar, daß von zwei Polygonen, die im Isotopiesinn unverschlungen sind, keines mit dem anderen im Sinne der unsymmetrischen Homotopie verschlungen sein kann. In der Tat: Leistet die eineindeutige Deformation f_t die Befreiung von A und B ohne gegenseitige Durchdringungen, und ist $\varphi_t^{(A)}$ eine Erweiterung der eineindeutigen Deformation $f_t(A)$ auf den ganzen Raum, $(\varphi_t^{(A)})^{-1}$ die zu $\varphi_t^{(A)}$ inverse Abbildung, so ist die auf A und B definierte Abbildung $(\varphi_t^{(A)})^{-1} f_t$ eine Befreiung von A

[4]) Vgl. Definition V und Fußnote [7]).

und B ohne gegenseitige Durchdringung unter Festhaltung von A. Da jedoch Definition III wesentlich unsymmetrisch, Definition IV symmetrisch ist, sind die beiden Verschlingungsbegriffe nicht äquivalent. Genauer gilt

Satz IV: *Es gibt Polygone, die im Sinne der Isotopie miteinander verschlungen sind, von denen aber keines mit dem anderen im Sinne der unsymmetrischen Homotopie verschlungen ist.* (Beweis: § 1, Beispiel 3.)

Die Invarianz der Definitionen I bis IV gegenüber eineindeutigen Deformationen des Polygonpaares A, B oder, was dasselbe ist, gegenüber eineindeutigen Deformationen des ganzen Raumes in sich ist evident. Zum Nachweis der topologischen Invarianz der in II bis IV definierten Verschlingungszahlen, d. h. der Unabhängigkeit der verschiedenen Mindestzahlen von der Geometrie des R^3, wäre noch eine eingehende Begründung erforderlich.

Die unsymmetrische Homotopieverschlingung ist derjenige Verschlingungsbegriff, der zum Beweis des Satzes (A) geeignet ist. Unter einer „Sehne des Polygonpaares A, B" soll jede mit einer Richtung versehene Gerade verstanden werden, die die Menge $A + B$ in wenigstens zwei nicht auf derselben Polygonseite gelegenen Punkten trifft. Eine Gerade heißt eine m-fache Sehne, wenn sie $A + B$ in wenigstens m (zu verschiedenen Polygonseiten gehörigen) Punkten trifft. Unter der Schnittfolge einer m-fachen Sehne, z. B. $(A, B, \ldots, A)$, wird die Angabe der Reihenfolge der Schnittpunkte mit A und B auf der gerichteten Geraden verstanden. Eine m-fache Sehne mit einer gegebenen Schnittfolge ist erst dann eindeutig bestimmt, wenn auf ihr m Schnittpunkte mit A und mit B in der durch die Schnittfolge vorgeschriebenen Reihenfolge ausgezeichnet sind; zwei m-fache Sehnen mit der gleichen Schnittfolge sind dann und nur dann identisch, wenn die beiden gerichteten Geraden zusammenfallen und die auf ihnen ausgezeichneten Schnittpunkte paarweise übereinstimmen. Wichtig sind im folgenden dreifache Sehnen mit der Schnittfolge (A, B, A) und (B, A, B) und vierfache Sehnen mit der Schnittfolge (B, A, B, A).

Die Verschärfung des Satzes (A) lautet:

Hauptsatz I: *Zwei zueinander fremde einfach geschlossene Polygone A und B mit den unsymmetrischen Homotopieverschlingungszahlen ${}_Av_B$ und ${}_Bv_A$ besitzen wenigstens ${}_Av_B \cdot {}_Bv_A$ vierfache Sehnen mit der Schnittfolge* (B, A, B, A). (Beweis: § 2.)

Darin ist der schwächere, aber in konkreten Fällen leichter anwendbare Satz enthalten: *Zwei zueinander fremde einfach geschlossene Polygone A und B mit der Homologieverschlingungszahl u besitzen wenigstens u^2 vierfache Sehnen mit der Schnittfolge* (B, A, B, A).

Die Existenz dreifacher Sehnen mit der Schnittfolge (A, B, A) bzw. (B, A, B) ergibt sich für Kurvenpaare mit von Null verschiedener unsymmetrischer Homotopieverschlingungszahl ${}_A v_B$ bzw. ${}_B v_A$ leicht aus der Verschlingungsdefinition (§ 2, Hilfssatz III). Die Frage nach der Existenz vierfacher Sehnen findet dadurch ihre Rechtfertigung, daß Sehnen höherer Vielfachheit keinerlei Invarianzeigenschaften aufweisen: sie können durch eine beliebig kleine Verrückung der Polygonecken beseitigt werden. In der Tat: die Gerade $\mathfrak{G}$ schneide die fünf Polygonseiten $\mathfrak{s}_i$ $(i = 1, \ldots, 5)$ von $A + B$ in fünf voneinander verschiedenen Punkten. $A + B$ darf in allgemeiner Lage angenommen werden; infolgedessen haben zwei $\mathfrak{s}_i$, die in einer Ebene liegen, stets einen Eckpunkt gemeinsam, da anderenfalls eine solche Ebene vier Ecken von $A + B$ enthielte. $\mathfrak{G}$ kann also keine der $\mathfrak{s}_i$ enthalten, da mit einer in $\mathfrak{G}$ enthaltenen Seite jede der vier anderen $\mathfrak{s}_i$ in einer Ebene liegen, also eine Ecke gemeinsam haben müßte. Ferner können sich drei $\mathfrak{s}_i$ nicht zu einem Streckenzug aneinanderschließen; denn hätten $\mathfrak{s}_1$ und $\mathfrak{s}_2$, $\mathfrak{s}_2$ und $\mathfrak{s}_3$ je einen Eckpunkt gemeinsam, so lägen $\mathfrak{s}_1$ und $\mathfrak{s}_3$ in der durch $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{s}_2$ bestimmten Ebene, müßten also ebenfalls einen Eckpunkt gemeinsam haben; $\mathfrak{s}_1$, $\mathfrak{s}_2$ und $\mathfrak{s}_3$ können aber kein Dreieck bilden, weil diese drei Seiten von $\mathfrak{G}$ in drei verschiedenen Punkten geschnitten werden. Für die durch die $\mathfrak{s}_i$ bestimmten Geraden $\mathfrak{S}_i$ sind also bei passender Numerierung nur folgende drei Fälle möglich: 1. die $\mathfrak{S}_i$ sind paarweise zueinander windschief; 2. $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ schneiden sich, abgesehen davon sind die $\mathfrak{S}_i$ paarweise zueinander windschief; 3. $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ schneiden sich, $\mathfrak{S}_3$ und $\mathfrak{S}_4$ schneiden sich; im übrigen sind die $\mathfrak{S}_i$ paarweise zueinander windschief. Jedenfalls kann man vier Tripel von zueinander windschiefen Geraden aus den $\mathfrak{S}_i$ auswählen: $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_3, \mathfrak{S}_5$; $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_4, \mathfrak{S}_5$; $\mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}_3, \mathfrak{S}_5$; $\mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}_4, \mathfrak{S}_5$. Jedes dieser Geradentripel bestimmt ein einschaliges Hyperboloid oder hyperbolisches Paraboloid $H_{\iota\varkappa\lambda}$. Die Tatsache, daß $\mathfrak{G}$ alle $\mathfrak{S}_i$ schneidet, besagt, daß die (nicht notwendig sämtlich voneinander verschiedenen) Flächen H_{135}, H_{145}, H_{235}, H_{245} die Gerade $\mathfrak{G}$ als gemeinsame Erzeugende haben. Durch eine kleine Verrückung der Ecken von $\mathfrak{s}_1$ kann man erreichen, daß H_{135} und H_{235} voneinander verschieden sind; H_{135} und H_{235} haben demnach in der einen Erzeugendenschar nur die Erzeugenden $\mathfrak{S}_3$ und $\mathfrak{S}_5$, also in der anderen Erzeugendenschar zwei Erzeugende $\mathfrak{G}'$ und $\mathfrak{G}''$ gemeinsam[5]). Durch eine kleine Verrückung von $\mathfrak{s}_4$ läßt sich erreichen, daß $\mathfrak{S}_4$ zu $\mathfrak{G}'$ und $\mathfrak{G}''$ fremd ist. Nach Ausführung dieser beiden Abänderungen gibt es keine Gerade mehr, die alle $\mathfrak{S}_i$ schneidet. Wenn man die Verrückung der Ecken klein genug macht,

[5]) Eine dieser beiden Erzeugenden kann eine uneigentliche Gerade sein.

läßt sich das Auftreten neuer fünf- oder mehrfacher Sehnen auf den von den s_i verschiedenen Seiten von A und B vermeiden.

c) Dem Beweis des Satzes (B) legen wir die folgende Knotendefinition zugrunde, die den Begriff der eineindeutigen Deformation vermeidet:

Definition V. Die Verknotungszahl k eines einfach geschlossenen Polygons K ist die für ein von K berandetes Element notwendige Anzahl von Randsingularitäten[6]). K heißt unverknotet, wenn $k = 0$ ist; anderenfalls heißt K verknotet[7]).

Die Verknotungszahl k ist offenbar invariant gegenüber eineindeutigen Deformationen von K und gegenüber eineindeutigen Deformationen des R^3 in sich. Über die topologische Invarianz ist dasselbe zu sagen wie bei den Verschlingungszahlen. Es gilt

Satz V: *k ist stets eine gerade Zahl; für verknotete Polygone ist also* $k \geqq 2$. (Beweis: § 3.)

Unter einer m-fachen Sehne ($m > 2$) von K wird eine (diesmal nicht mit Richtung versehene) Gerade verstanden, die K in wenigstens m Punkten schneidet, von denen keine zwei derselben Polygonseite angehören. Eine m-fache Sehne ist erst dann eindeutig bestimmt, wenn auf ihr m Schnittpunkte mit K ausgezeichnet sind; zwei m-fache Sehnen sind dann und nur dann identisch, wenn die beiden Geraden zusammenfallen und die auf ihnen ausgezeichneten Schnittpunkte mit K paarweise übereinstimmen.

Wie bei Verschlingungen folgt aus der Knotendefinition leicht die Existenz dreifacher Sehnen (§ 4, Hilfssatz XI). Fünf- und mehrfache Sehnen lassen sich wieder beseitigen. Über die vierfachen Sehnen gilt der

Hauptsatz II: *Ein einfach geschlossenes Polygon K im R^3 mit der Verknotungszahl k besitzt wenigstens $k^2/2$ vierfache Sehnen.* (Beweis: § 4.)

Über den Satz (B) hinausgehend ergibt sich hieraus: *Jeder Knoten besitzt wenigstens zwei vierfache Sehnen.*

d) Zu der Frage, wie weit die angegebenen Resultate verbesserungsfähig sind, sei bemerkt: Für Verschlingungen gibt es einfache Beispiele, etwa zwei miteinander verschlungene Dreiecke, für die die im Hauptsatz I gegebene untere Schranke für die Anzahl der vierfachen Sehnen mit der Schnittfolge (B, A, B, A) erreicht wird; doch wird diese Schranke für

[6]) Vgl. die Definition unter a).

[7]) Nach M. Dehn, Math. Annalen **69** (1910), S. 137—168, ist diese Definition äquivalent mit der folgenden: dann und nur dann heißt K unverknotet, wenn die Fundamentalgruppe von $R^3 - K$ kommutativ — und dann notwendig die freie Abelsche Gruppe von einer Erzeugenden — ist. Dagegen muß infolge einer Lücke im Beweis des Dehnschen Lemmas, auf die H. Kneser, Jahresber. D. M. V. **38** (1929), S. 248, aufmerksam gemacht hat, unentschieden bleiben, ob ein im Sinne der Definition V unverknotetes K immer mit einer Kreislinie isotop ist.

Kurvenpaare, die *nur* im Isotopiesinn miteinander verschlungen sind (vgl. § 1, Beispiel 3), Null, während anschauliche Beispiele auch in diesem Falle die Existenz vierfacher Sehnen zu bestätigen scheinen. — Ob die Schranke des Hauptsatzes II bei Knoten erreicht wird, muß selbst im einfachen Falle der Kleeblattschlinge ($k = 2$) unentschieden bleiben.

Die Voraussetzung der allgemeinen Lage der Polygone ist zur Durchführung der Beweise zweckmäßig, aber nicht wesentlich. Wie man leicht sieht, läßt sich die allgemeine Lage eines Polygonpaares bzw. eines Knotens durch kleine Verrückung der Ecken stets ohne Vermehrung der Anzahl der vierfachen Sehnen herstellen; daraus folgt die Gültigkeit der beiden Hauptsätze auch für Polygone, die der Bedingung der allgemeinen Lage nicht genügen.

Der (im Hauptsatz I enthaltene) Satz (A) für Polygone führt bei geeigneter Verschlingungsdefinition leicht zum Beweis des Satzes (A) für beliebige stetige Kurven (ohne die Verschärfung durch den Hauptsatz I). A und B seien zwei zueinander fremde einfach geschlossene Kurven im R^3. A und B sollen miteinander verschlungen heißen, wenn es eine Zahl $\varepsilon > 0$ gibt, so daß für jedes die Kurven A, B mit der Güte ε approximierende Polygonpaar A_ε, B_ε sowohl ${}_{A_\varepsilon}v_{B_\varepsilon} \neq 0$ als auch ${}_{B_\varepsilon}v_{A_\varepsilon} \neq 0$ ist. Für ein verschlungenes Kurvenpaar A, B besitzt also jedes Paar von Approximationspolygonen A_ε, B_ε eine vierfache Sehne mit der Schnittfolge $(B_\varepsilon, A_\varepsilon, B_\varepsilon, A_\varepsilon)$. Ist $A^{(\nu)}$, $B^{(\nu)}$ eine gegen A, B konvergierende Folge von Approximationspolygonen, so gibt es wenigstens eine Gerade G, gegen die sich die vierfachen Sehnen mit der Schnittfolge $(B^{(\nu)}, A^{(\nu)}, B^{(\nu)}, A^{(\nu)})$ häufen. G ist dann offenbar eine vierfache Sehne von A, B mit der Schnittfolge (B, A, B, A).

Die Hauptsätze bleiben für stetige Kurven gültig, wenn man die folgenden Definitionen der Verschlingungszahlen und der Verknotungszahl zugrunde legt: ${}_Av_B^{(\varepsilon)}$ und ${}_Bv_A^{(\varepsilon)}$ bezeichne die kleinsten Werte, die ${}_{A_\varepsilon}v_{B_\varepsilon}$ und ${}_{B_\varepsilon}v_{A_\varepsilon}$ in der Gesamtheit der das Kurvenpaar A, B mit der Güte ε approximierenden Polygonpaare A_ε, B_ε annehmen können. Entsprechend bezeichne $k^{(\varepsilon)}$ die kleinste für ein die doppelpunktfreie Kurve K mit der Güte ε approximierendes Polygon mögliche Verknotungszahl. Mit gegen Null abnehmendem ε nehmen ${}_Av_B^{(\varepsilon)}$, ${}_Bv_A^{(\varepsilon)}$ und ebenso $k^{(\varepsilon)}$ nicht ab. Wenn diese Zahlen für $\varepsilon \to 0$ schließlich endlich und konstant bleiben, so soll dieser endliche Wert der Wert von ${}_Av_B$, ${}_Bv_A$ bzw. k sein; anderenfalls wird ${}_Av_B$ bzw. ${}_Bv_A$ bzw. k unendlich [8]). — Der Beweis der

[8]) Das Beispiel der Antoineschen Kurve A und eines in $R^3 - A$ kein Element berandenden Kreises B zeigt, daß ${}_Bv_A = 0$ sein kann, obwohl sich B in $R^3 - A$ nicht auf einen Punkt zusammenziehen läßt, daß also die hier definierten Verschlingungszahlen die Verschlingung stetiger Kurven nur sehr unvollkommen beschreiben. Vgl. L. Antoine, Journ. de Math. (4) 8 (1921), S. 311—325; J. W. Alexander, Proc. U. S. A. Acad. **10** (1924), S. 8—10.

Häuptsätze für stetige Kurven wird, da er langwierige Approximationen erfordert, in der Arbeit nicht durchgeführt. Die Schwierigkeit besteht darin, zu zeigen, daß die vierfachen Sehnen, die bei jeder Approximation in der erforderlichen Anzahl vorhanden sind, gegen *verschiedene* Sehnen des Polygonpaares bzw. des Knotens konvergieren.

§ 1.

Verschlingungsbegriffe. Beweis der Sätze I bis IV.

Zum Beweis des Satzes I sind zwei einfache Hilfssätze über die Auflösung von Knoten mit Selbstdurchdringungen erforderlich.

K sei ein geschlossenes Polygon in der Ebene. K sei regulär, d. h. die Ecken von K seien nicht Doppelpunkte von K, und in jedem Doppelpunkt schneiden sich genau zwei Seiten von K. K heiße normiert, wenn in jedem Doppelpunkt eine der beiden Seiten als die „obere", die andere als die „untere" bezeichnet ist. Auf das reguläre normierte Polygon K dürfen die bei Knotenprojektionen erlaubten Abänderungen angewandt werden. Solche Abänderungen sind neben eineindeutigen Deformationen $\mathsf{K}_t\,(0 \leqq t \leqq 1)$ von K, bei denen nur für endlich viele t-Werte Eckpunkte von K_t Doppelpunkte von K_t sind, die folgenden drei Prozesse: Bildung einer Schleife (Ω_1) oder Beseitigung einer Schleife (Ω_1') (Fig. 1a); Bildung zweier benachbarter Über- und Unterkreuzungen (Ω_2) und Beseitigung zweier benachbarter Über- und Unterkreuzungen (Ω_2') (Fig. 1b); Hinüberschieben einer über einem sich schneidenden Seitenpaar gelegenen Seite über den Schnittpunkt des Seitenpaares (Ω_3) (Fig. 1c)[9]. Das normierte Polygon K heiße „vollständig reduzibel", wenn es durch Abänderungen der genannten Art in ein einfach geschlossenes Polygon übergeführt werden kann.

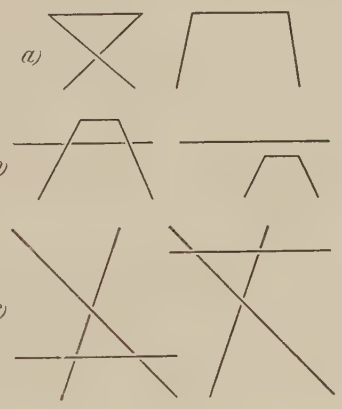

Fig. 1.

Hilfssatz I. Jedes reguläre Polygon kann so normiert werden, daß es vollständig reduzibel wird.

Beweis. Ein reguläres Polygon mit höchstens zwei Doppelpunkten kann bei jeder Normierung durch höchstens zweimalige Anwendung der

[9]) Die Bezeichnungen Ω_i sind im Anschluß an K. Reidemeisters Bericht „Knotentheorie", Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **1**, Heft 1 (1932) gewählt; für die Einzelheiten sei auf diesen Bericht verwiesen. Vgl. auch K. Reidemeister, Hamb. Abh. **5** (1926), S. 24—32.

Operation Ω_1' in ein einfach geschlossenes Polygon übergeführt werden, ist also immer vollständig reduzibel. Der Satz sei also für Polygone mit höchstens $n-1$ Doppelpunkten bewiesen; K sei ein reguläres Polygon mit n Doppelpunkten. Jeder Doppelpunkt zerlegt K in zwei geschlossene Teilpolygone. Der Doppelpunkt π sei so gewählt, daß eines der beiden Teilpolygone — es heiße K' — eine möglichst kleine Anzahl von Seiten besitzt. K' ist dann doppelpunktfrei. Das andere Teilpolygon K'', für das π nicht mehr Doppelpunkt ist, hat höchstens $n-1$ Doppelpunkte. Für K'' wähle man eine Normierung, die K'' vollständig reduzibel macht. K wird folgendermaßen normiert: im Punkte π ist die Festsetzung oben–unten willkürlich; in den Doppelpunkten von K, die zugleich Doppelpunkte von K'' sind, soll die für K'' festgesetzte Normierung auch für K gelten; in den Doppelpunkten von K, die Schnittpunkte von K' mit K'' sind, erhält die zu K' gehörige Seite die Bezeichnung oben. Bei dieser Normierung ist K vollständig reduzibel. In der Tat: Von den beiden Seiten von K, die sich in π schneiden, muß je eine Teilstrecke zu K', die andere zu K'' gehören. Man kann auf den beiden zu K' gehörigen Teilstrecken zwei Punkte ϱ und σ bestimmen, so daß die Strecken $\pi\varrho$ und $\pi\sigma$ außer π keinen Doppelpunkt von K enthalten und die Strecke $\varrho\sigma$ bis auf die Endpunkte zu K fremd ist. Λ' sei derjenige ϱ mit σ verbindende Streckenzug von K', der π nicht enthält. Λ' bildet zusammen mit der Strecke $\varrho\sigma$ ein einfach geschlossenes Polygon. Es gibt also eine Deformation f_t $(0 \leqq t \leqq 1)$ von Λ', die Λ' unter Festhaltung der Endpunkte in die Strecke $\varrho\sigma$ überführt und bei der 1. Λ_t' für alle t doppelpunktfrei und 2. Λ_t' für $t \neq 1$ bis auf die Endpunkte fremd zu $\varrho\sigma$ ist. Ferner läßt sich, nötigenfalls durch eine kleine Modifikation von f_t, erreichen, daß 3. der Durchschnitt von Λ_t' mit $\varrho\pi + \mathsf{K}'' + \pi\sigma$ für jedes t nur aus endlich vielen Punkten besteht und – abgesehen von ϱ und σ – nur für endlich viele t-Werte Eckpunkte von Λ_t' oder $\varrho\pi + \mathsf{K}'' + \pi\sigma$ enthält. f_t wird zu einer Deformation von K erweitert durch die Festsetzung: Für jeden Punkt ξ von $\varrho\pi + \mathsf{K}'' + \pi\sigma$ ist für alle t $f_t(\xi) = \xi$. Bei der Deformation f_t können Doppelpunkte von K_t nur dadurch entstehen oder verschwinden, daß entweder eine Ecke von Λ_t' eine Seite von $\varrho\pi + \mathsf{K}'' + \pi\sigma$ oder eine Seite von Λ_t' eine Ecke von $\varrho\pi + \mathsf{K}'' + \pi\sigma$ überschreitet. In beiden Fällen entstehen oder verschwinden immer Paare von benachbarten Doppelpunkten. Setzt man fest, daß in jedem während der Deformation entstehenden Doppelpunkt die zu Λ_t' gehörige Seite über der zu $\varrho\pi + \mathsf{K}'' + \pi\sigma$ gehörigen Seite liegen soll, so wird dadurch die Deformation f_t zu einer erlaubten Abänderung des normierten Polygons K; denn jedes Auftreten oder Verschwinden von Doppelpunkten kann als eine Operation Ω_2 bzw. Ω_2', jedes Hinwegschieben einer

Seite von Λ_t' über einen Doppelpunkt von $\varrho\pi + \mathsf{K}'' + \pi\sigma$ als eine Operation Ω_3 gedeutet werden. Das Endergebnis K_1 der so definierten erlaubten Abänderung von K, das Polygon $\mathsf{K}'' + \pi\varrho + \varrho\sigma + \sigma\pi$, hat in π einen Doppelpunkt, der durch eine Operation Ω_1' beseitigt werden kann; dabei geht K_1 über in das Polygon K'', das nach Voraussetzung vollständig reduzibel ist.

Ist K ein einfach geschlossenes Polygon im R^3, so ist — abgesehen von gewissen singulären Projektionsrichtungen — die Orthogonalprojektion von K auf eine Ebene E ein reguläres Polygon K, das durch die räumliche Lage von K in natürlicher Weise normiert ist. Den eineindeutigen Deformationen von K mit den in der Einleitung genannten Vorsichtsmaßregeln entsprechen bekanntlich die erlaubten Abänderungen der in natürlicher Weise normierten Projektion K, und umgekehrt. Normierte Polygone in der Ebene, die durch erlaubte Abänderungen auseinander hervorgehen, sind also Projektionen von räumlichen Polygonen, die denselben Knoten darstellen. Insbesondere sind die vollständig reduziblen normierten Polygone Projektionen von solchen unverknoteten Polygonen, die ein singularitätenfreies Elementarflächenstück beranden[10]).

Hilfssatz II. A sei ein einfach geschlossenes Polygon im R^3; $\mathfrak{G}$ sei die Fundamentalgruppe von $R^3 - A$. Unter den Kurven von $R^3 - A$, die ein gegebenes Element $\mathfrak{g}$ von $\mathfrak{G}$ darstellen, gibt es stets ein einfach geschlossenes unverknotetes Polygon mit vollständig reduzibler Projektion.

Beweis. Zunächst kann man als Repräsentanten des Gruppenelements $\mathfrak{g}$ jedenfalls ein doppelpunktfreies Polygon G wählen. A und $\mathsf{\Gamma}$ seien orthogonale Projektionen von A und G in eine Ebene E. E sei so gewählt, daß die Forderung der Regularität der Projektion für alle Doppelpunkte von $\mathsf{A} + \mathsf{\Gamma}$ erfüllt ist. $\mathsf{\Gamma}_0$ bezeichnet das Polygon $\mathsf{\Gamma}$ in der durch die räumliche Lage von G bestimmten Normierung; $\mathsf{\Gamma}_1$ sei eine — nach Hilfssatz I existierende — Normierung von $\mathsf{\Gamma}$, die $\mathsf{\Gamma}$ vollständig reduzibel macht. G läßt sich auf dem von den Projektionsstrahlen durch G gebildeten „Zylinder" mit Selbstdurchdringungen in $R^3 - A$ in ein doppelpunktfreies Polygon G_1 deformieren, dessen Projektion auf E in der durch seine räumliche Lage bestimmten Normierung das Polygon $\mathsf{\Gamma}_1$ ist. G_1 ist dann ein Repräsentant von $\mathfrak{g}$ mit den verlangten Eigenschaften. Die Deformation von G in ein Polygon G_1

[10]) Ein Polygon K mit vollständig reduzibler Projektion geht durch eineindeutige stetige Deformation aus einem Polygon K^* mit doppelpunktfreier Projektion hervor; K^* berandet ein singularitätenfreies Elementarflächenstück E^*, und wenn die Deformation von K^* in K zu einer eineindeutigen Deformation des ganzen Raumes erweitert wird, so wird dabei E^* in ein von K berandetes singularitätenfreies Elementarflächenstück E übergeführt.

geschieht nach folgender Vorschrift: $\pi^{(\varkappa)}$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots, k$) seien diejenigen Doppelpunkte von Γ, in denen sich die Normierungen Γ_0 und Γ_1 voneinander unterscheiden. Auf jeder der in den $\pi^{(\varkappa)}$ bei der Normierung Γ_0 unten gelegenen Strecken von Γ bestimme man vier Punkte $\mu^{(\varkappa)}$, $\nu^{(\varkappa)}$, $\varrho^{(\varkappa)}$, $\sigma^{(\varkappa)}$, die zusammen mit $\pi^{(\varkappa)}$ in der Reihenfolge $\mu^{(\varkappa)}$, $\nu^{(\varkappa)}$, $\pi^{(\varkappa)}$, $\varrho^{(\varkappa)}$, $\sigma^{(\varkappa)}$ liegen. Die vier Punkte mögen so nahe bei $\pi^{(\varkappa)}$ liegen, daß die Strecken $\mu^{(\varkappa)}\sigma^{(\varkappa)}$ keinen Schnittpunkt von Γ mit A und — abgesehen von $\pi^{(\varkappa)}$ — auch keinen Doppelpunkt von Γ enthalten, und daß zwei zu verschiedenen $\varkappa$ gehörige Strecken zueinander fremd sind. $m_0^{(\varkappa)}$, $n_0^{(\varkappa)}$, $r_0^{(\varkappa)}$, $s_0^{(\varkappa)}$ seien diejenigen Punkte von G, deren Projektionen die Punkte $\mu^{(\varkappa)}$, $\nu^{(\varkappa)}$, $\varrho^{(\varkappa)}$, $\sigma^{(\varkappa)}$ sind; diese vier Punkte sind als Ecken von $G = G_0$ anzusehen. f_t ($0 \leqq t \leqq 1$) sei die folgende Deformation von G_0: 1. für jede von $n_0^{(\varkappa)}$ und $r_0^{(\varkappa)}$ verschiedene Ecke e_0 von G_0 sei $e_t = e_0$ für alle t; 2. ist e_0 eine der Ecken $n_0^{(\varkappa)}$ oder $r_0^{(\varkappa)}$, so soll e_t ein Punkt sein, der auf dem Projektionsstrahl durch e_0 im Abstand $\lambda \cdot t$ oberhalb von e_0 liegt; über den konstanten Faktor λ wird noch verfügt werden; 3. jede Seite $e_0' e_0''$ von G_0 wird auf die entsprechende Seite $e_t' e_t''$ von G_t proportional abgebildet. Wählt man λ so groß, daß für jedes $\varkappa$ bei einem Wert $t^{(\varkappa)}$, $0 < t^{(\varkappa)} < 1$, ein Schnittpunkt der Seite $n_{t^{(\varkappa)}}^{(\varkappa)} r_{t^{(\varkappa)}}^{(\varkappa)}$ mit derjenigen Seite von G_0 auftritt, deren Projektion die bei der Normierung Γ_0 in $\pi^{(\varkappa)}$ oben gelegene Seite ist, so stimmt die Normierung der durch die räumliche Lage von G_t normierten Projektion von G_t für alle $t > t^{(\varkappa)}$ im Punkte $\pi^{(\varkappa)}$ mit der Normierung Γ_1 überein. Die Projektion von G_1 ist also bei Normierung durch die räumliche Lage von G_1 mit Γ_1 identisch und daher vollständig reduzibel. Da bei der Deformation f_t nur solche Punkte des Raumes von G_t überstrichen werden, die entweder zu G_0 selbst gehören oder auf den durch die Strecken $\mu^{(\varkappa)}\sigma^{(\varkappa)}$ hindurchgehenden Projektionsstrahlen liegen, die Strecken $\mu^{(\varkappa)}\sigma^{(\varkappa)}$ aber zur Projektion von A fremd sind, verläuft die Deformation ganz in $R^3 - A$.

Beweis von Satz I. A und B seien zwei im Sinne der Homologie unverschlungene Polygone. Nach Hilfssatz II kann man B in $R^3 - A$ in ein unverknotetes Polygon B_1 deformieren. Da B in $R^3 - A$ homolog Null ist, ist auch B_1 in $R^3 - A$ und daher A in $R^3 - B_1$ homolog Null. Da ferner B_1 unverknotet ist, sind Fundamentalgruppe und Homologieklassengruppe von $R^3 - B_1$ miteinander identisch; A ist also homotop Null in $R^3 - B_1$, d. h. A berandet ein Elementarflächenstück E in $R^3 - B_1$. Auf E kann A in ein Polygon A_1 deformiert werden, das ganz in einer Kugel von vorgeschriebenem Radius um einen beliebigen Punkt von E liegt; wählt man diese Kugel so klein, daß B_1 ganz in ihrem Äußeren liegt, so ist mit den Polygonen A_1 und B_1 eine Befreiung von A und B erreicht.

Die Beweise für den Zusatz zu Satz I und den zweiten Zusatz zu Satz III können gemeinsam geführt werden. Dazu sei zunächst bemerkt, daß die Voraussetzung des zweiten Zusatzes zu Satz III, die besagt, daß B unverknotet sein soll, ohne Beschränkung der Allgemeinheit auch für den Beweis des Zusatzes zu Satz I gemacht werden darf; denn nach Hilfssatz II kann B, falls es noch verknotet ist, mit Selbstdurchdringungen in $R^3 - A$ in ein unverknotetes Polygon deformiert werden, und dabei bleiben die Homologieverschlingungszahl und die symmetrische Homotopieverschlingungszahl ungeändert. Im folgenden sei also B unverknotet. u bezeichne die Homologieverschlingungszahl, v die symmetrische Homotopieverschlingungszahl von A und B, ${}_Av_B$ die unsymmetrische Homotopieverschlingungszahl von A mit B. Aus der Definition von v und ${}_Av_B$ folgt $v \leqq {}_Av_B$ (s. Einleitung). Ferner gilt $|u| \leqq v$. Denn ist f_t $(0 \leqq t \leqq 1)$ eine Deformation des Polygonpaares A, B, bei der genau *eine* Durchdringung von A mit B auftritt, so kann sich der Wert von u für $t = 1$ von dem Wert von u für $t = 0$ um höchstens ± 1 unterscheiden[11]). Unterwirft man also A und B einer Deformation f_t $(0 \leqq t \leqq 1)$, die die Befreiung von A und B mit genau v Durchdringungen von A und B leistet, so unterscheiden sich die Werte von u für $t = 0$ und $t = 1$ höchstens um den Betrag v. Da A_1 und B_1 voneinander befreit sind, ist für $t = 1$ $u = 0$ geworden, und daher war für $t = 0$ $|u| \leqq v$.

Um aus der Ungleichung $|u| \leqq v \leqq {}_Av_B$ auf die Gleichung $|u| = v = {}_Av_B$ schließen zu können, beweisen wir die Ungleichung $|u| \geqq {}_Av_B$. Dazu ist zu zeigen: es gibt ein von A berandetes Elementarflächenstück, das B in höchstens $|u|$ Punkten schneidet. E sei ein von A berandetes Elementarflächenstück. Die algebraische Anzahl der Schnittpunkte von E mit B ist gleich u. Wenn die ohne Vorzeichen gezählte Anzahl der Schnittpunkte von E mit B noch größer als $|u|$ ist, so kann man E durch ein Elementarflächenstück E' ersetzen, das mit B zwei Schnittpunkte weniger gemeinsam hat als E. Wenn nämlich $|u|$ nicht gleich der absoluten Anzahl der Schnittpunkte von B und E ist, so gibt es Schnittpunkte beiderlei Vorzeichens von B mit E; p_1 und p_2 sei ein Paar von Schnittpunkten verschiedenen Vorzeichens von E mit B. $\mathfrak{E}$ sei ein abstraktes Original von E; den Punkten p_1 und p_2 entsprechen in $\mathfrak{E}$ zwei Punkte $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$; außerdem liegen in $\mathfrak{E}$ noch endlich viele Punkte $\mathfrak{q}_i$, die Originalpunkte der von p_1 und p_2 verschiedenen Schnittpunkte von B mit E sind. In $\mathfrak{E}$ konstruiere man eine einfach geschlossene Kurve $\mathfrak{K}$, die $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ enthält, die Punkte $\mathfrak{q}_i$ aber aus-

---

[11]) Vgl. L. E. J. Brouwer, l. c.

schließt. $\mathfrak{e}$ sei das von $\mathfrak{K}$ berandete Teilelement von $\mathfrak{E}$. Der Kurve $\mathfrak{K}$ und dem von ihr berandeten Element $\mathfrak{e}$ entsprechen im R^3 eine Kurve K und ein von ihr berandetes Teilelement e von E. Da das Element e mit B nur die beiden Schnittpunkte p_1 und p_2 aufweist, die verschiedenes Vorzeichen haben, ist K in $R^3 - B$ homolog Null. Da B unverknotet ist, ist K in $R^3 - B$ homotop Null, berandet also ein Element e', das zu B fremd ist. Wenn man jetzt aus E das Element e wegläßt und in die Randkurve K statt dessen das Element e' einheftet, so entsteht dadurch ein Element E', das zwei Schnittpunkte weniger mit B aufweist als E. Dies Verfahren kann so lange wiederholt werden, wie noch Schnittpunkte verschiedenen Vorzeichens mit B vorhanden sind; wenn solche Schnittpunkte nicht mehr existieren, ist die absolute Anzahl der Schnittpunkte des Elements mit B gleich $|u|$ geworden und damit das Ziel der Konstruktion erreicht.

Beweis des Satzes II. *Beispiel* 1 (Fig. 2). A sei ein Knoten. Die Fundamentalgruppe von $R^3 - A$ ist also nicht kommutativ, sie enthält daher ein von der Identität verschiedenes Kommutatorelement. Ein solches Kommutatorelement kann — nach Hilfssatz II — durch ein unverknotetes Polygon B repräsentiert werden. B ist in $R^3 - A$ nicht homotop Null, also ${}_B v_A \neq 0$. Dagegen ist B in $R^3 - A$, also auch A in $R^3 - B$ homolog Null, und da B unverknotet ist, ist A in $R^3 - B$ homotop Null, d. h. ${}_A v_B = 0$.

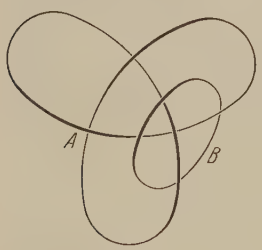

Fig. 2.

Beweis des Satzes III. *Beispiel* 2 (Fig. 3). A sei ein Knoten. Unter einer Nachbarkurve von A soll eine Kurve verstanden werden, die zusammen mit A ein singularitätenfreies zweirandiges Band (topologisches Bild eines Kreisringes) berandet. Jede Nachbarkurve von A stellt denselben Knotentyp dar wie A. Es gibt eine Nachbarkurve von A, die in $R^3 - A$ homolog Null ist[12]); B sei eine solche Kurve. Da B in $R^3 - A$ homolog Null ist, sind A und B im Sinne der Homologie, also — nach Satz I — im Sinne der symmetrischen Homotopie mit einander unverschlungen. B ist aber in $R^3 - A$ nicht homotop Null. Denn wenn B in $R^3 - A$ ein Elementarflächenstück E berandete, so erhielte man durch Einheften von E in die Randkurve B des von A und B berandeten singularitätenfreien Bandes ein von A berandetes

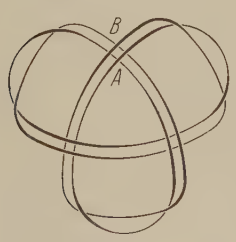

Fig. 3.

[12]) M. Dehn, l. c.

Element ohne Randsingularitäten; das ist unmöglich, weil A verknotet ist. Es ist also ${}_B v_A \neq 0$ und — da dieselbe Überlegung unter Vertauschung von A und B gilt — auch ${}_A v_B \neq 0$.

Beweis des Satzes IV. *Beispiel* 3. Für das in Fig. 4 gegebene Kurvenpaar A, B hat zum erstenmal L. Antoine[13]) bewiesen, daß A und B durch eineindeutige Deformation nicht voneinander befreit werden können, d. h. im Sinne der Isotopie miteinander verschlungen sind. Daß B in $R^3 - A$ mit einer Selbstdurchdringung auf einen Punkt zusammengezogen werden kann, also im Sinne der unsymmetrischen Homotopie mit A nicht verschlungen ist, ist evident. Da B unverknotet ist, folgt ferner aus dem Zusatz zu Satz III, daß auch A mit B im Sinne der unsymmetrischen Homotopie nicht verschlungen ist.

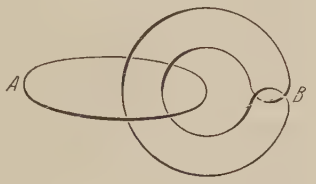

Fig. 4.

§ 2.

Die mehrfachen Sehnen verschlungener Polygonpaare. Beweis des Hauptsatzes I.

Der Beweis des Hauptsatzes über die Anzahl der vierfachen Sehnen des Polygonpaares A, B beruht darauf, daß die Sehnen mit der Schnittfolge (B, A, B, A) als solche Geraden gedeutet werden können, auf denen das erste Schnittpunktepaar einer Sehne mit der Schnittfolge (A, B, A) zusammenfällt mit dem letzten Schnittpunktepaar einer Sehne mit der Schnittfolge (B, A, B). Die folgenden Hilfssätze über Sehnen mit der Schnittfolge (A, B, A) gelten unter Vertauschung von A und B auch für Sehnen mit der Schnittfolge (B, A, B).

Hilfssatz III[14]). Jeder Punkt des Polygons A ist Anfangspunkt von wenigstens ${}_A v_B$ Sehnen mit der Schnittfolge (A, B, A).

Beweis. Unter den Sehnen mit der Schnittfolge (A, A) und mit festem Anfangspunkt a_0 gebe es genau $r\,(r \geqq 0)$ Sehnen mit der Schnittfolge (A, B, A). Die Strecken $a_0 a$ überstreichen, wenn a das Polygon A einmal umläuft, ein von A berandetes Elementarflächenstück, das von B in genau r Punkten geschnitten wird. Also ist $r \geqq {}_A v_B$.

---

[13]) L. c., S. 290–294. Der Beweis kann einfacher dadurch geführt werden, daß man nachweist: die Fundamentalgruppe von $R^3 - (A + B)$ ist nicht die freie Gruppe von zwei Erzeugenden.

[14]) Dieser Satz ist zum Beweis des Hauptsatzes nicht erforderlich; er soll nur die Existenz der dreifachen Sehnen bestätigen und eine anschauliche Vorstellung von der Menge dieser Sehnen geben.

$a_0 b_0 \bar{a}_0$ sei eine Sehne mit der Schnittfolge (A, B, A). Unter einer ε-Umgebung der Sehne $a_0 b_0 a_0$ in der Menge der Sehnen mit der Schnittfolge (A, B, A) ist die Gesamtheit der Sehnen $a b \bar{a}$ zu verstehen, für die die auf den Polygonen A bzw. B gemessenen Abstände $a a_0$, $b b_0$, $a \bar{a}_0$ alle kleiner als ε sind. Es genügt, hinreichend kleine Umgebungen in Betracht zu ziehen, die nicht den vollen Umlauf um ein Polygon enthalten, und bei denen die Umgebungen der Punkte a_0 und a_0 zueinander fremd sind. Durch die Umgebungsdefinition sind die Limesbegriffe in der Menge der Sehnen mit der Schnittfolge (A, B, A) festgelegt.

Unter einem durch die Seiten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\bar{\mathfrak{a}}$ des Polygonpaares A, B bestimmten Elementarbestandteil $E_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\bar{\mathfrak{a}}}$ der Menge der Sehnen mit der Schnittfolge (A, B, A) verstehen wir die Gesamtheit der Sehnen mit dieser Schnittfolge, deren Schnittpunkte mit A und B der Reihe nach den Seiten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\bar{\mathfrak{a}}$ angehören. Eine Sehne von $E_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\bar{\mathfrak{a}}}$, die unter ihren Schnittpunkten mit $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\bar{\mathfrak{a}}$ wenigstens eine Polygonecke aufweist, wird als Eckensehne, jede andere Sehne als innere Sehne des Elementarbestandteils bezeichnet.

Hilfssatz IV. Ein Elementarbestandteil der Menge der Sehnen mit der Schnittfolge (A, B, A) ist entweder leer oder einem abgeschlossenen Intervall homöomorph. Jeder nicht leere Elementarbestandteil besitzt genau zwei Eckensehnen; sie entsprechen den Intervallendpunkten. Der Durchschnitt zweier verschiedener Elementarbestandteile ist entweder leer, oder er besteht genau aus einer Eckensehne. Jede Eckensehne gehört genau zu zwei Elementarbestandteilen.

Beweis. Die durch die Seiten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\bar{\mathfrak{a}}$ bestimmten Geraden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\overline{\mathfrak{A}}$ sind wegen der allgemeinen Lage von $A + B$ entweder zueinander fremd, oder $\mathfrak{A}$ und $\overline{\mathfrak{A}}$ haben eine Ecke von A gemeinsam, und $\mathfrak{B}$ schneidet die durch $\mathfrak{A}$, $\overline{\mathfrak{A}}$ bestimmte Ebene. Im ersten Falle bilden die Geraden, die $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\overline{\mathfrak{A}}$ treffen, eine Erzeugendenschar E eines einschaligen Hyperboloids oder hyperbolischen Paraboloids, also eine einparametrige Geradenschar. Man darf annehmen, daß auf den Geraden von E die Schnittpunkte mit $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\overline{\mathfrak{A}}$ in der richtigen Reihenfolge liegen — andernfalls ist $E_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\bar{\mathfrak{a}}}$ leer. Im zweiten Falle besteht die Gesamtheit der Geraden, die $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\overline{\mathfrak{A}}$ treffen, aus dem durch die Ebene $\mathfrak{A}\overline{\mathfrak{A}}$ und ihren Schnittpunkt mit $\mathfrak{B}$ bestimmten Geradenbüschel; die Parallelen zu $\mathfrak{A}$ und $\overline{\mathfrak{A}}$ sind dabei aus dem Büschel wegzulassen, so daß das Büschel der (mit Richtung versehenen) Geraden in vier Bestandteile zerfällt. E sei der (eindeutig bestimmte) Büschelbestandteil, dessen Erzeugende $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\overline{\mathfrak{A}}$ in der richtigen Reihenfolge treffen. In beiden Fällen bezeichnen $E_{\mathfrak{a}}$, $E_{\mathfrak{b}}$, $E_{\bar{\mathfrak{a}}}$ die Gesamtheit derjenigen Geraden von E, die $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$ oder $\overline{\mathfrak{A}}$ in Punkten von $\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{b}$ oder $\bar{\mathfrak{a}}$ schneiden; $E_{\mathfrak{a}}$ und $E_{\bar{\mathfrak{a}}}$ sind immer,

$E_{\mathfrak{b}}$ ist im allgemeinen einem abgeschlossenen Intervall homöomorph; nur im Falle des Geradenbüschels ist $E_{\mathfrak{b}}$ ganz E. In jedem Fall ist der Durchschnitt $E_{\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\bar{\mathfrak{a}}}$ von $E_{\mathfrak{a}}$, $E_{\mathfrak{b}}$ und $E_{\bar{\mathfrak{a}}}$ dem Durchschnitt von drei oder zwei abgeschlossenen Intervallen homöomorph; er ist also entweder leer oder einem abgeschlossenen Intervall homöomorph, oder er besteht nur aus einer einzigen Geraden. Dieser letzte Fall kann aber nicht eintreten. Denn die Geraden, die in $E_{\mathfrak{a}}$, $E_{\mathfrak{b}}$, $E_{\bar{\mathfrak{a}}}$ den Endpunkten der Intervalle entsprechen, sind gerade die durch die Endpunkte von $\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{b}$ oder $\bar{\mathfrak{a}}$ hindurchgehenden Geraden. Der Elementarbestandteil $E_{\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\bar{\mathfrak{a}}}$ wird also stets von Eckensehnen begrenzt. Bestände $E_{\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\bar{\mathfrak{a}}}$ insbesondere nur aus einer Geraden, so müßte diese Gerade Ecken von mindestens zwei der drei Strecken $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\bar{\mathfrak{a}}$ enthalten; das ist wegen der allgemeinen Lage von A und B unmöglich, da dann die durch diese Gerade und die dritte Polygonseite bestimmte Ebene vier Ecken des Polygonpaares A, B enthielte.

$a\,b\,\bar{a}$ sei eine Sehne mit der Schnittfolge (A, B, A). Wenn die Punkte a, b, a innere Punkte von Polygonseiten sind, ist der Elementarbestandteil, dem diese Sehne angehört, durch die durch a, b, $\bar{a}$ hindurchgehenden Polygonseiten eindeutig bestimmt. Andernfalls ist, wie eben gezeigt worden ist, nur einer der drei Punkte a, b, $\bar{a}$ Eckpunkt; es können also genau zwei Elementarbestandteile gebildet werden, denen die Sehne $a\,b\,\bar{a}$, und zwar als Eckensehne, angehört.

Man kann die Menge der Sehnen mit der Schnittfolge (A, B, A) nach Hilfssatz IV auffassen als einen eindimensionalen Komplex; die Eckensehnen sind die Ecken, die nicht leeren Elementarbestandteile die Strecken des Komplexes. Da es nur endlich viele Polygonseiten, also auch nur endlich viele Elementarbestandteile gibt, ist der Komplex endlich. Dadurch, daß nach Hilfssatz IV jede Ecke zu genau zwei Strecken gehört, ist der Aufbau dieses Komplexes bestimmt; es gilt die

Folgerung aus Hilfssatz IV. Die Menge der Sehnen mit der Schnittfolge (A, B, A) ist entweder leer, oder sie ist homöomorph einem nicht notwendig zusammenhängenden geschlossenen Streckenkomplex, dessen Komponenten einfach geschlossene Polygone sind.

Hilfssatz V. Auf wenigstens einem der beiden Polygone A, B gibt es einen Punkt, der nicht mittlerer Schnittpunkt einer Sehne mit der Schnittfolge (B, A, B) bzw. (A, B, A) ist.

Beweis. p, q seien zwei Punkte der Menge $A + B$, für die die Länge der Strecke $p\,q$ einen möglichst großen Wert annimmt. Dann kann weder p noch q innerer Punkt einer Sehne der Menge $A + B$ sein. Denn wäre z. B. q innerer Punkt einer Sehne $u\,v$, so wäre wenigstens eine der Strecken $p\,u$, $p\,v$ länger als $p\,q$, im Widerspruch zur Definition von $p\,q$.

Der Hilfssatz V läßt sich nicht dahin verschärfen, daß auf jeder der beiden Kurven A, B ein Punkt existiert, der nicht mittlerer Schnittpunkt einer Sehne mit der Schnittfolge (B, A, B) bzw. (A, B, A) ist. Das erkennt man an folgendem Beispiel: A sei ein Kreis mit dem Radius r, in rechtwinkligen Koordinaten dargestellt durch

$$x = r \cdot \cos\varphi, \quad y = r \cdot \sin\varphi, \quad z = 0 \quad (0 \leqq \varphi < 2\pi).$$

B sei die Kurve

$$x = r \cdot \cos\varphi \cdot \left(1 + \tfrac{1}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\right), \; y = r \cdot \sin\varphi \cdot \left(1 + \tfrac{1}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\right),$$
$$z = \frac{r}{2} \cdot \sin\frac{\varphi}{2} \qquad (0 \leqq \varphi < 4\pi).$$

B wird von dem Endpunkt einer in der Normalebene des Kreises A gelegenen Strecke von der Länge $r/2$ beschrieben, wenn man die Normalebene mit konstanter Geschwindigkeit zweimal um A herumführt und gleichzeitig die Strecke, deren Anfangspunkt auf A liegt, mit konstanter Winkelgeschwindigkeit gegen die Hauptnormale eine volle Umdrehung in der Normalebene ausführen läßt. In der Tat bestimmen dann die beiden zu den Parameterwerten φ und $\varphi + 2\pi$ gehörigen Punkte von B eine Sehne mit der Schnittfolge (B, A, B), deren mittlerer Schnittpunkt der zum Parameterwert φ gehörige Punkt von A ist. Wenn der Anfangspunkt der Sehne die Kurve B einmal umläuft, durchläuft der mittlere Schnittpunkt die Kurve A zweimal. — Das Beispiel, zu dessen Beschreibung hier der Einfachheit halber stetig gekrümmte Kurven benutzt wurden, läßt sich auch durch Polygone in allgemeiner Lage realisieren.

Die Gesamtheit der Sehnen des Polygonpaares A, B mit der Schnittfolge (A, B) wird in bekannter Weise eineindeutig und stetig auf den Produktraum der beiden Kurven, einen Torus T, abgebildet: α und β seien stetige eigentlich monotone Parameter auf A bzw. B, die so normiert sind, daß einem einmaligen Umlauf um A oder B eine Änderung des zugehörigen Parameterwertes um ± 1 entspricht. Deutet man $x = \alpha$ und $y = \beta$ als rechtwinklige Koordinaten in einer Ebene E, so ist E universelle Überlagerungsfläche von T mit den Decktransformationen $(\mathfrak{t}_{m,n})$ $x' = x + m$, $y' = y + n$ mit ganzzahligem m und n. Dann und nur dann stellen zwei Punkte von E dieselbe Sehne dar, wenn sie bei einer Decktransformation äquivalent sind.

Ein Punkt x, y der Ebene E heiße ein „Repräsentant“ einer Sehne mit der Schnittfolge (A, B, A), wenn seine zu den Parameterwerten $\alpha = x$, $\beta = y$ gehörigen Originalpunkte a und b auf den Polygonen A und B erster und mittlerer Schnittpunkt einer Sehne mit der Schnittfolge (A, B, A) sind. Der Punkt x, y heißt ein i-facher Repräsentant von Sehnen mit der Schnittfolge (A, B, A), wenn auf der von a nach b ge-

richteten Geraden $a\,b$ hinter b genau i Schnittpunkte mit A liegen. $M(A\,B, A)$ bezeichne die aus den Repräsentanten von Sehnen mit der Schnittfolge (A, B, A) gebildete Teilmenge von Punkten von E; bei Abzählungen ist jeder Punkt von $M(A\,B, A)$ mit der ihm zugeordneten Vielfachheit zu zählen.

Unter entsprechenden Festsetzungen über die Vielfachheit bedeutet $M(B, A\,B)$ die Menge der Repräsentanten von Sehnen mit der Schnittfolge (B, A, B); dabei soll jede Sehne mit dieser Schnittfolge in der Ebene durch ein solches System äquivalenter Punkte dargestellt werden, deren Originalpunkte a und b mittlerer und letzter Schnittpunkt einer Sehne mit der Schnittfolge (B, A, B) sind.

Ein Punkt $x,\ y$, der dem Durchschnitt der beiden Mengen $M(A\,B, A)$ und $M(B, A\,B)$ angehört, stellt das mittlere Schnittpunktepaar einer Sehne mit der Schnittfolge (B, A, B, A) dar. Ist $x,\ y$ ein i-facher Punkt von $M(A\,B, A)$ und ein j-facher Punkt von $M(B, A\,B)$, so liegen auf der Geraden $a\,b$, die dem Punkt $x,\ y$ entspricht, i Schnittpunkte mit A hinter b und j Schnittpunkte mit B vor a; es gibt also $i \cdot j$ Möglichkeiten, die Gerade $a\,b$ als vierfache Sehne mit der Schnittfolge (B, A, B, A) und dem mittleren Schnittpunktepaar $a,\ b$ zu deuten. Demgemäß ist ein solcher Punkt $x,\ y$ als Punkt des Durchschnitts $M(B, A\,B, A)$ der Mengen $M(B, A\,B)$ und $M(A\,B, A)$ $(i \cdot j)$-fach zu zählen. Umgekehrt kann jede Sehne mit der Schnittfolge (B, A, B, A) nur auf eine Weise aus zwei Sehnen mit der Schnittfolge (B, A, B) und (A, B, A) durch Identifikation der beiden letzten Punkte einer Sehne mit der Schnittfolge (B, A, B) mit den beiden ersten Punkten einer Sehne mit der Schnittfolge (A, B, A) aufgebaut werden. Bei richtiger Zählung der Vielfachheiten ist also die Beziehung zwischen den Sehnen mit der Schnittfolge (B, A, B, A) und den wesentlich verschiedenen (d. h. bei Decktransformationen nicht äquivalenten) Punkten der Menge $M(B, A\,B, A)$ umkehrbar eindeutig. *Der Hauptsatz* I *ist somit gleichbedeutend mit der folgenden Behauptung: die Menge* $M(B, A\,B, A)$ *enthält wenigstens* ${}_{A}v_{B} \cdot {}_{B}v_{A}$ *wesentlich verschiedene Punkte.*

Die Übertragung der Ergebnisse von Hilfssatz IV und V auf die Ebene E ermöglicht der

Hilfssatz VI. Jedem nicht leeren Elementarbestandteil der Menge der Sehnen mit der Schnittfolge (A, B, A) entspricht in der Menge $M(A\,B, A)$ ein System von miteinander äquivalenten abgeschlossenen doppelpunktfreien Kurvenbogen, die als Elementarbogen bezeichnet werden mögen. Zwei äquivalente Elementarbogen sind zueinander fremd. Der Durchschnitt zweier wesentlich verschiedener Elementarbogen, die Bilder zweier Elementarbestandteile ohne gemeinsame Eckensehne sind, ist entweder

leer oder ein Punkt oder ein (echter oder unechter) Teilbogen der beiden Bogen.

Beweis. Je nachdem, ob der Elementarbestandteil $E_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{a}}$ der Erzeugendenschar eines einschaligen Hyperboloids (oder hyperbolischen Paraboloids) oder eines Geradenbüschels angehört, sind die Kurvenparameter den Sehnen des Elementarbestandteils auf A und auf B eineindeutig und stetig oder auf A eineindeutig und stetig und auf B eindeutig und stetig zugeordnet. In jedem Falle wird $E_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\bar{\mathfrak{a}}}$ eineindeutig und stetig in $M(AB, A)$ abgebildet; das Bild von $E_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{a}}$ ist also einem abgeschlossenen Intervall homöomorph, d. h ein abgeschlossener doppelpunktfreier Kurvenbogen; den Eckensehnen von $E_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\bar{\mathfrak{a}}}$ entsprechen die Endpunkte des Elementarbogens. — Da die Kurvenparameter in $E_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{a}}$ auf je eine Polygonseite beschränkt sind, müssen zwei äquivalente Elementarbogen zueinander fremd sein.

Zwei Elementarbogen, die zwei verschiedenen Elementarbestandteilen $E_{\mathfrak{a}_0\mathfrak{b}_0\bar{\mathfrak{a}}_0}$ und $E_{\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\bar{\mathfrak{a}}_1}$ entsprechen, können nur dann Punkte gemeinsam haben, wenn $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_0 = \mathfrak{b}_1$ ist[15]). Je nachdem, ob das an der Bildung von $E_{\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\bar{\mathfrak{a}}_1}$ beteiligte Teilintervall von $\bar{\mathfrak{a}}_1$ das Flächenstück, das von den Erzeugenden von $E_{\mathfrak{a}_0\mathfrak{b}_0\bar{\mathfrak{a}}_0}$ gebildet wird, in einem Punkte schneidet oder ganz oder teilweise in dieses Flächenstück hineinfällt, entspricht dem Durchschnitt von $E_{\mathfrak{a}_0\mathfrak{b}_0\bar{\mathfrak{a}}_0}$ und $E_{\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\bar{\mathfrak{a}}_1}$ in $M(AB, A)$ ein Punkt oder ein einfacher Bogen. — Übrigens können zwei nicht äquivalente Elementarbogen von $M(AB, A)$ auch dann zueinander fremd sein, wenn die zugehörigen Elementarbestandteile $E_{\mathfrak{a}_0\mathfrak{b}_0\bar{\mathfrak{a}}_0}$ und $E_{\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\bar{\mathfrak{a}}_1}$ eine Erzeugende oder ein Teilintervall ihrer Erzeugendenscharen gemeinsam haben; das kann z. B. eintreten, wenn $\mathfrak{a}_0 \neq \mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_0 = \mathfrak{b}_1$, $\bar{\mathfrak{a}}_0 = \bar{\mathfrak{a}}_1$ ist.

Durch die Folgerung aus Hilfssatz IV in Verbindung mit Hilfssatz VI ist der Aufbau der Menge $M(AB, A)$ vollständig beschrieben:

Hilfssatz VII. Die Menge $M(AB, A)$ ist aufgebaut aus endlich vielen Systemen äquivalenter Elementarbogen; das Auftreten von mehrfachen Punkten, die dem Durchschnitt mehrerer wesentlich verschiedener Elementarbogen angehören[15]), ist durch Hilfssatz VI bestimmt. $M(AB, A)$ ist die Überlagerungsmenge endlich vieler geschlossener Kurven auf dem Torus, die eindeutige (aber im allgemeinen nicht eineindeutige) stetige Bilder der Komponenten der Menge der Sehnen mit der Schnittfolge (A, B, A) sind.

[15]) Die Möglichkeit, daß etwa $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_0 \neq \mathfrak{b}_1$ ist, $\mathfrak{b}_0$ und $\mathfrak{b}_1$ einen Eckpunkt gemeinsam haben, braucht nicht in Betracht gezogen zu werden, da dann $E_{\mathfrak{a}_0\mathfrak{b}_0\bar{\mathfrak{a}}_0}$ und $E_{\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\bar{\mathfrak{a}}_1}$ eine Eckensehne gemeinsam haben; in diesem Falle schließen sich die beiden Elementarbogen in einem Endpunkt zu einem doppelpunktfreien Bogen zusammen.

Der Inhalt des Hilfssatzes V ist gleichbedeutend mit

Hilfssatz VIII. Es gibt in E entweder eine Gerade $y = \text{const}$, die zu $M(AB, A)$ fremd ist, oder eine Gerade $x = \text{const}$, die zu $M(B, AB)$ fremd ist.

Das wichtigste Hilfsmittel zum Beweis des Hauptsatzes I bildet der

Hilfssatz IX. Jeder Kurvenbogen $\mathfrak{C}$ in der Ebene E, der einen Punkt x, y mit einem bei einer Decktransformation $t_{m,1}$ äquivalenten Punkt $x + m$, $y + 1$ $(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ verbindet, schneidet die Menge $M(AB, A)$ in wenigstens ${}_B\nu_A$ Punkten.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf man annehmen, daß $\mathfrak{C}$ den Punkt 0, 0 mit dem Punkt m, 1 verbindet. Die Anzahl der Schnittpunkte von $\mathfrak{C}$ mit $M(AB, A)$ sei endlich — andernfalls ist die Behauptung gewiß richtig — und gleich r. Eine Parameterdarstellung von $\mathfrak{C}$ sei gegeben durch

$$x = \varphi(s), \quad y = \psi(s) \qquad (0 \leqq s \leqq 1); \tag{1}$$

dabei ist

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(1) = m, \tag{1'}$$

$$\psi(0) = 0, \quad \psi(1) = 1. \tag{1''}$$

Bezeichnet β den Parameter auf B, so ist durch

$$\beta_1 = \psi(\beta) \qquad (0 \leqq \beta \leqq 1) \tag{2}$$

eine eindeutige stetige Abbildung von B auf sich gegeben. In der Tat ist ψ eine eindeutige stetige Funktion, und die Bedingungen (1″) zeigen, daß die Stetigkeit auch in dem zu den beiden Parameterwerten $\beta = 0$ und $\beta = 1$ gehörigen Punkt von B gewahrt ist. Überdies geht aus (1″) hervor, daß der Grad der Abbildung $+1$ ist, die Abbildung also durch stetige Deformation aus der identischen Abbildung hervorgeht. B_1 sei das durch die Abbildung (2) vermittelte Bild von B.

Durch die Kurve $\mathfrak{C}$ wird jedem Punkt von B_1 eine Sehne mit der Schnittfolge (A, B) nach folgender Vorschrift zugeordnet: Im Punkte $b_1(s)$ von B_1, der zum Parameterwert $\beta_1 = \psi(s)$ gehört, wird eine Gerade angebracht, die das Polygon A in dem zum Parameterwert $\alpha_1 = \varphi(s)$ gehörigen Punkte $a_1(s)$ schneidet; die Richtung der Geraden weist von $a_1(s)$ nach $b_1(s)$. Die Geradenschar hängt eindeutig und stetig vom Parameter s ab; $s = 0$ und $s = 1$ bestimmen wegen (1′) und (1″) dieselbe Gerade. Schnittpunkte mit A hinter $b_1(s)$ weist eine Gerade $a_1(s)\,b_1(s)$ dann und nur dann auf, wenn der entsprechende Punkt $\varphi(s)$, $\psi(s)$ von $\mathfrak{C}$ zu $M(AB, A)$ gehört; dabei stimmt die Anzahl der hinter $b_1(s)$ gelegenen Schnittpunkte von $a_1(s)\,b_1(s)$ mit A genau mit der Vielfachheit des Punktes $\varphi(s)$, $\psi(s)$ in der Menge $M(AB, A)$ überein. Insgesamt treten also in der Geradenschar genau r solche Schnittpunkte mit A auf.

Eine Befreiung von A und B mit genau r Durchdringungen von A und B wird durch die folgende — allerdings nicht polygonale —

Deformation f_t $(0 \leqq t \leqq 2)$ von B geleistet: (1) Für $0 \leqq t \leqq 1$ sei f_t eine Deformation, die die identische Abbildung von B auf sich in die durch die Gleichung (2) vermittelte Abbildung von B auf sich, also B in B_1 überführt. Bei diesem Teil der Deformation, der nur die Kurve B in sich deformiert, treten keine Durchdringungen von B mit A auf. (2) Für $1 \leqq t \leqq 2$ sei $b_t(s)$ der auf der Geraden $a_1(s)\, b_1(s)$ im Abstand $\lambda(t-1)$ hinter $b_1(s)$ gelegene Punkt. Jeder Punkt der Kurve B_1 läuft also während dieses Teiles der Deformation auf der ihm zugeordneten Geraden mit konstanter Geschwindigkeit λ in Richtung dieser Geraden. Es können also höchstens so viele Durchdringungen von B mit A auftreten, wie es in der Geradenschar hinter $b_1(s)$ gelegene Schnittpunkte mit A gibt, d. h. höchstens r. Wählt man die Konstante λ so groß, daß das Endresultat der Deformation, die Kurve B_2, ganz außerhalb einer das Polygon A im Innern enthaltenden Kugel liegt, so ist damit eine Befreiung von A und B erreicht. Übrigens ist in diesem Falle die Anzahl der Durchdringungen von B mit A genau gleich r.

Die so definierte Deformation f_t $(0 \leqq t \leqq 2)$ kann durch eine polygonale Deformation f_t' approximiert werden, die ebenfalls die Befreiung von A und B mit höchstens r Durchdringungen von A und B leistet. Aus der Definition von ${}_Bv_A$ folgt dann ${}_Bv_A \leqq r$.

Bei der Herstellung von f_t' kommt es nur auf den zweiten Teil $1 \leqq t \leqq 2$ der Deformation an. Denn ist B_1' irgendeine hinreichend gute polygonale Approximation von B_1, so läßt sich $B_0' = B$ innerhalb einer Umgebung von B, die zu A fremd ist, polygonal in B_1' deformieren. Für $0 \leqq t \leqq 1$ sei also f_t' eine solche polygonale Deformation, die B in die im folgenden definierte Approximation B_1' von B_1 überführt. — Die Zahl $\varepsilon\,(>0)$ sei so gewählt, daß eine ε-Umgebung von B fremd zu A ist und eine ε-Umgebung von B_2 noch außerhalb einer A im Innern enthaltenden Kugel liegt. $b_t(s)$ bezeichne das Bild des zum Parameterwert $\beta = s$ gehörigen Punktes von B bei der Abbildung f_t. $s^{(\varkappa)}$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots q;\ q \leqq r)$ seien diejenigen Parameterwerte, für die Schnittpunkte der Strecken $b_1^2(s^{(\varkappa)}) = b_1(s^{(\varkappa)})\, b_2(s^{(\varkappa)})$ mit A auftreten. Jeder Schnittpunkt einer $b_1^2(s^{(\varkappa)})$ mit A hat eine positive Minimalentfernung von denjenigen Seiten von A, denen er nicht angehört; δ sei die kleinste unter diesen Entfernungen. Man bestimme $\sigma\,(>0)$, so daß für jedes Intervall $I^{(\varkappa)}$: $s^{(\varkappa)} - \sigma \leqq s \leqq s^{(\varkappa)} + \sigma$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots q)$ die Strecken $b_1^2(s)$ innerhalb einer $\delta/2$-Umgebung von $b_1^2(s^{(\varkappa)})$ liegen, daß ferner für verschiedene $\varkappa$ die $I^{(\varkappa)}$ zueinander fremd sind und die zu den Ecken von B gehörigen Parameterwerte, abgesehen höchstens von den $s^{(\varkappa)}$, außerhalb der $I^{(\varkappa)}$ liegen, und daß schließlich die dem Intervall $I^{(\varkappa)}$ entsprechenden Teilbogen von B_1 und von B_2 durch die geradlinige Verbindung ihrer Endpunkte mit

der Güte ε approximiert werden. Die Entfernungen der Punkte $b_t(s)$, deren s-Werte zu keinem der $I^{(\varkappa)}$ gehören, von A bleiben oberhalb einer positiven Schranke η. Die Komplementärintervalle der $I^{(\varkappa)}$ unterteile man so fein, daß für zwei aufeinanderfolgende Teilpunkte s' und s'' $(s' < s'')$ desselben Komplementärintervalls alle Strecken $b_1^2(s)$ mit $s' \leqq s \leqq s''$ innerhalb einer η 2-Umgebung von $b_1^2(s')$ liegen, und daß jeder einem Intervall $s' \leqq s \leqq s''$ entsprechende Teilbogen von B_1 und von B_2 durch die geradlinige Verbindung seiner Endpunkte mit der Güte ε approximiert wird. $\bar{s}_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots n)$ bezeichnen die s-Werte, die einer Ecke von B entsprechen oder ein $s^{(\varkappa)}$, $s^{(\varkappa)} - \sigma$, $s^{(\varkappa)} + \sigma$ oder ein Teilpunkt eines Komplementärintervalls der $I^{(\varkappa)}$ sind; die $\bar{s}_\nu$ seien ihrer Reihenfolge auf B entsprechend geordnet. Falls für irgendein ν die vier Punkte $b_1(s_\nu)$, $b_1(\bar{s}_{\nu+1})$, $b_2(\bar{s}_\nu)$, $b_2(\bar{s}_{\nu+1})$ $(n+1$ ist dabei durch 1 zu ersetzen) in einer Ebene liegen, kann man durch eine beliebig kleine Verrückung dieser Punkte erreichen, daß dies nicht mehr der Fall ist; die Verrückung kann so ausgeführt werden, daß die Punkte $b_1(s^{(\varkappa)})$ und $b_2(s^{(\varkappa)})$ fest bleiben, die Strecken $b_1^2(s_\nu)$ für jedes von den $s^{(\varkappa)}$ verschiedene s_ν fremd zu A bleiben und alle bisher getroffenen Festsetzungen über die Güte der Approximation erhalten bleiben. Durch die Verrückung mögen die Punkte $b_1(\bar{s}_\nu)$ und $b_2(\bar{s}_\nu)$ in die Punkte $b_1'(s_\nu)$ bzw. $b_2'(s_\nu)$ übergehen. B_1' sei das durch die geradlinigen Verbindungen $b_1'(\bar{s}_\nu)\, b_1'(\bar{s}_{\nu+1})$, B_2' das durch die Strecken $b_2'(\bar{s}_\nu)\, b_2'(\bar{s}_{\nu+1})$ gebildete Polygon $(\nu = 1, 2, \ldots n;\ n+1$ wird durch 1 ersetzt). B_1' und B_2' approximieren B_1 bzw. B_2 mit der Güte ε. Für $1 \leqq t \leqq 2$ sei $b_t'(s_\nu)$ derjenige Punkt, der die Strecke $b_1'(\bar{s}_\nu)\, b_2'(s_\nu)$ im Verhältnis $(t-1):(2-t)$ teilt. Die Deformation f_t' ist für $1 \leqq t \leqq 2$ dadurch definiert, daß man jedem Punkt von B, der zu einem Parameterwert $\beta = \bar{s}_\nu$ gehört, den Punkt $b_t'(s_\nu)$ und der durch zwei Punkte $\beta = \bar{s}_\nu$ und $\beta = \bar{s}_{\nu+1}$ bestimmten Teilstrecke von B die Strecke $b_t'(\bar{s}_\nu)\, b_t'(\bar{s}_{\nu+1})$ als Bild bei der Abbildung f_t' zuordnet. Aus der Konstruktion von B_t' ergibt sich leicht, daß die einzigen Durchdringungen von B_t' mit A die Schnittpunkte der Strecken $b_1^2(s^{(\varkappa)})$ mit A sind. Die Seitenlängen der B_t' bleiben oberhalb einer positiven Schranke, weil die Strecken $b_1^2(s_\nu)$ und $b_1^2(\bar{s}_{\nu+1})$, auf denen benachbarte Eckpunkte bei der Deformation wandern, nicht in einer Ebene liegen[16]).

[16]) Wegen einer späteren Anwendung desselben Verfahrens sei hier noch hinzugefügt: sind $\bar{s}_{\nu-1}$, $\bar{s}_\nu$, $\bar{s}_{\nu+1}$ drei aufeinanderfolgende Teilpunkte des Parameterintervalls, und liegen auf der Strecke $b_1^2(\bar{s}_\nu)$ Schnittpunkte mit A, die zu den t-Werten $t^{(\varkappa)}$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots k)$ gehören mögen, so kann man bei der Verrückung der Ecken von $b_1^2(\bar{s}_{\nu-1})$ und $b_1^2(\bar{s}_{\nu+1})$ auch noch erreichen, daß die beiden Strecken $b'_{t^{(\varkappa)}}(\bar{s}_{\nu-1})\, b'_{t^{(\varkappa)}}(\bar{s}_\nu)$ und $b'_{t^{(\varkappa)}}(\bar{s}_\nu)\, b'_{t^{(\varkappa)}}(\bar{s}_{\nu+1})$ für jedes $t^{(\varkappa)}$ bis auf den gemeinsamen Eckpunkt $b'_{t^{(\varkappa)}}(\bar{s}_\nu)$ zueinander fremd sind.

Bis zu dieser Stelle kann in allen Hilfssätzen die Menge $M(AB, A)$ unter Vertauschung von B mit A durch die Menge $M(B, AB)$ ersetzt werden. Insbesondere wird der Hilfssatz IX im folgenden sowohl für die Menge $M(AB, A)$ als auch für die Menge $M(B, AB)$ gebraucht werden. Von nun an wird auf Grund des Hilfssatzes VIII eine der beiden Mengen ausgezeichnet: die Menge $M(AB, A)$ lasse eine Schar äquivalenter Geraden $y = \text{const}$ frei. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf man annehmen, daß dies die Geraden $y = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ sind.

Hilfssatz X. Die Menge $M(AB, A)$ (die die Geraden $y = 0, \pm 1, \ldots$ frei läßt) enthält wenigstens ${}_B\nu_A$ doppelpunktfreie Kurvenbogen $C_1, C_2, \ldots C_{B\nu_A}$, die folgenden Bedingungen genügen: (1) C_ν ($\nu = 1, 2, \ldots {}_B\nu_A$) enthält außer den Endpunkten kein Paar bei einer Decktransformation äquivalenter Punkte; (2) die Endpunkte jedes C_ν entsprechen einander bei der Decktransformation $\mathfrak{t}_{\pm 1, 0}$; (3) wenn durch einen Punkt x, y von $M(AB, A)$ i Kurvenbogen hindurchgehen, die zu i verschiedenen C_ν oder damit äquivalenten Kurven gehören, so ist x, y ein wenigstens i-facher Punkt der Menge $M(AB, A)$.

Beweis. Wenn ${}_B\nu_A = 0$ ist, so besagt der Satz nichts; zum Beweis sei daher ${}_B\nu_A > 0$ vorausgesetzt. Die Geraden $y = 0, \pm 1, \ldots$ sind frei von Punkten von $M(AB, A)$; nach Hilfssatz IX werden diese Geraden durch die Menge $M(AB, A)$ in der Ebene E voneinander getrennt. G bezeichne dasjenige Komplementärgebiet der Menge $M(AB, A)$ in E, dem die Gerade $y = 0$ angehört, C_1^* denjenigen Teil der Begrenzung von G, der dem Streifen $0 < y < 1$ angehört und $y = 0$ von $y = 1$ trennt. Da C_1^* ebenso wie ganz $M(AB, A)$ aus endlich vielen wesentlich verschiedenen einfachen Kurvenbogen und gewissen damit äquivalenten Bogen aufgebaut ist, ist C_1^* eine (beiderseits unbeschränkte) stetige Kurve, die ebenso wie G bei der Decktransformation $\mathfrak{t}_{1, 0}$ in sich übergeht; jeder Punkt von C_1^* ist daher von G aus erreichbar. Je zwei Punkte der stetigen Kurve C_1^* lassen sich durch einen doppelpunktfreien Kurvenbogen in C_1^* verbinden. C_1' sei ein doppelpunktfreier Bogen, der zwei bei der Decktransformation $\mathfrak{t}_{1, 0}$ äquivalente Punkte in C_1^* miteinander verbindet. Wenn C_1' außer den Endpunkten noch zwei bei $\mathfrak{t}_{1, 0}$ äquivalente Punkte enthält, so kann man einen Teilbogen C_1 von C_1' bestimmen, auf dem die Endpunkte, aber kein Paar von inneren Punkten bei $\mathfrak{t}_{1, 0}$ äquivalent sind.

Ist ${}_B\nu_A = 1$, so ist mit der Bestimmung von C_1 der Beweis des Satzes erbracht. Es sei also ${}_B\nu_A > 1$. Die beiderseits unbeschränkte einfache offene Kurve $\overline{C}_1 = \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} \mathfrak{t}_{\mu, 0}(C_1)$ zerlegt die Ebene zwischen den

Geraden $y = 0$ und $y = 1$ in genau zwei Gebiete, deren gemeinsame Grenze sie ist. Bildet man die Menge $M_1(AB, A) = M(AB, A) - \sum_{\mu,\nu=-\infty}^{+\infty} t_{\mu,\nu}(C_1)$, d. h. erniedrigt man in jedem Punkt, der auf C_1 oder einem mit C_1 äquivalenten Bogen liegt, die Vielfachheit, mit der er zu $M(AB, A)$ gehört, um 1, so wird die Menge $M_1(AB, A)$ von jedem Bogen $\mathfrak{C}$, der einen Punkt der Geraden $y = 0$ mit einem auf der Geraden $y = 1$ gelegenen Punkte verbindet, noch in wenigstens ${}_Bv_A - 1$ Punkten geschnitten. In der Tat: r sei die Anzahl der Schnittpunkte von $\mathfrak{C}$ mit $M_1(AB, A)$. $\mathfrak{C}$ schneidet $\overline{C}_1$ mindestens einmal. Wenn $\mathfrak{C}$ und $\overline{C}_1$ mehr als einen Schnittpunkt besitzen, so ersetze man den Teilbogen von $\mathfrak{C}$ von dem auf $y = 0$ gelegenen Anfangspunkt bis zum letzten Schnittpunkt q mit $\overline{C}_1$ durch einen anderen Bogen, der bis auf seinen Endpunkt q ganz im Innern von G verläuft. Der dadurch aus $\mathfrak{C}$ entstandene Bogen $\mathfrak{C}_1$ hat mit $M_1(AB, A)$ höchstens r Schnittpunkte, mit $\overline{C}_1$ genau einen Schnittpunkt und mit denjenigen zu $\overline{C}_1$ äquivalenten Kurven, die der Halbebene $y < 0$ angehören, keinen Schnittpunkt mehr gemeinsam. Wenn C_1 mit den in der Halbebene $y > 1$ gelegenen zu $\overline{C}_1$ äquivalenten Kurven noch Schnittpunkte aufweist, so kann man die in $y \geqq 1$ gelegenen Teilbogen von $\mathfrak{C}_1$ durch Strecken der Geraden $y = 1$ ersetzen. Der so entstandene Bogen $\mathfrak{C}_2$ schneidet $M_1(AB, A)$ in höchstens r Punkten, die Kurve $\overline{C}_1$ in genau einem Punkt und die zu $\overline{C}_1$ äquivalenten Kurven gar nicht; er besitzt also höchstens $r + 1$ Schnittpunkte mit $M(AB, A)$. Da man aber den Endpunkt von $\mathfrak{C}_2$ durch eine Teilstrecke der Geraden $y = 1$ mit einem zum Anfangspunkt äquivalenten Punkt verbinden kann, ohne $M(AB, A)$ zu treffen, muß nach Hilfssatz IX die Anzahl der Schnittpunkte von $\mathfrak{C}_2$ mit $M(AB, A)$ mindestens gleich ${}_Bv_A$, also $r \geqq {}_Bv_A - 1$ sein.

Wendet man das bei der Auswahl von C_1 benutzte Verfahren auf die Menge $M_1(AB, A)$ an, so erhält man einen zweiten Bogen C_2 der gesuchten Art und eine Restmenge $M_2(AB, A)$, die von jedem Bogen $\mathfrak{C}$, der zwei Punkte auf $y = 0$ und $y = 1$ miteinander verbindet, in wenigstens ${}_Bv_A - 2$ Punkten geschnitten wird. Hat man nach diesem Verfahren $C_1, C_2, \ldots C_n$ schon konstruiert, so hat die Restmenge $M_n(AB, A)$ noch wenigstens ${}_Bv_A - n$ Schnittpunkte mit jedem Bogen $\mathfrak{C}$ gemeinsam, der einen Punkt von $y = 0$ mit einem Punkt von $y = 1$ verbindet. Wenn $n < {}_Bv_A$ ist, führt Wiederholung des Verfahrens zu einer neuen Kurve C_{n+1}.

Daß die so konstruierten Kurvenbogen $C_1, C_2, \ldots C_{{}_Bv_A}$ den Forderungen (1) bis (3) des Satzes genügen, geht unmittelbar aus der Konstruktion hervor.

Beweis des Hauptsatzes I. Jeder der in Hilfssatz X konstruierten Bogen $C_1, C_2, \ldots C_{B v_A}$ hat nach Hilfssatz IX, angewandt auf die Menge $M(B, AB)$, mit $M(B, AB)$ wenigstens ${}_A v_B$ Schnittpunkte. Zwei auf demselben C_ν gelegene Schnittpunkte sind nicht äquivalent, nach Hilfssatz X, (1). Zwei zu verschiedenen C_ν gehörige Schnittpunkte mit $M(B, AB)$ sind wegen der Eigenschaft (3) in Hilfssatz X im Sinne der Vielfachheiten voneinander verschieden. Der Durchschnitt $M(B, AB, A)$ von $M(AB, A)$ und $M(B, AB)$ enthält also bei Berücksichtigung der Vielfachheiten wenigstens ${}_A v_B \cdot {}_B v_A$ wesentlich verschiedene Punkte, und diese Tatsache ist gleichbedeutend mit der Gültigkeit des Hauptsatzes I.

§ 3.

Die Knoteninvariante k. Beweis des Satzes V.

Bei dem *Beweis des Satzes* V führt dasselbe Verfahren zum Ziel, das Dehn beim Beweis des „Lemmas" zur Beseitigung der offenen Doppellinien anwendet[17]). Da indessen das Vorhandensein von Randsingularitäten im vorliegenden Falle eine kleine Modifikation des Dehnschen Verfahrens notwendig macht, sei das Verfahren hier mit der erforderlichen Abänderung wiedergegeben.

K sei ein einfach geschlossenes Polygon im R^3, E ein von K berandetes Element. Für K und E gelten die in der Einleitung formulierten Voraussetzungen der allgemeinen Lage. Über diese Bedingungen hinausgehend wird im folgenden gefordert: in einer Strecke schneiden sich höchstens zwei, in einem Punkte höchstens drei Dreiecke von E; die Randsingularitäten sind einfach, d. h. die Schnittpunkte von K mit Dreiecken von E sind alle voneinander verschieden. Diese Bedingungen lassen sich durch beliebig kleine Verrückung der Ecken von E erfüllen.

$\mathfrak{E}$ sei ein abstraktes Original von E; $\mathfrak{E}$ ist trianguliert, und jedes Dreieck $\mathfrak{D}$ von $\mathfrak{E}$ wird auf ein nicht entartetes Dreieck D von E affin abgebildet. Infolge des Verbotes mehrfacher singulärer Linien kann man den Verlauf einer „Doppellinie" auf E und den Verlauf ihrer beiden Originale in $\mathfrak{E}$ eindeutig verfolgen: s sei eine „Doppelstrecke" von E, d. h. die Schnittstrecke zweier Dreiecke D_1 und D_2 von E, und p einer ihrer Endpunkte. p gehört in wenigstens einem der beiden Dreiecke D_1, D_2 zum Rande. $\mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{D}_2$ seien die beiden Originaldreiecke von D_1 bzw. D_2 in $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{s}_1$ und $\mathfrak{s}_2$ die Originalstrecken von s in $\mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{D}_2$. Da sich D_1 und D_2 im R^3 schneiden, sind $\mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{D}_2$ entweder zueinander fremd, oder sie haben genau eine Ecke, sonst aber keinen Punkt gemeinsam. Zunächst seien $\mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{D}_2$ zueinander fremd. Wenn p

[17]) Dehn, l. c.

zum Rande von D_1 gehört, so ist, da wegen der allgemeinen Lage von E weder eine Ecke von D_1 zu D_2 gehören kann noch zwei Seiten von D_1 und D_2 einander schneiden können, das Original $\mathfrak{p}_1$ von p innerer Punkt einer Seite $\mathfrak{d}_1$ von $\mathfrak{D}_1$ und das Original $\mathfrak{p}_2$ von p innerer Punkt von $\mathfrak{D}_2$. Wenn an die Seite $\mathfrak{d}_1$ von $\mathfrak{D}_1$ ein Dreieck $\overline{\mathfrak{D}}_1$ anschließt, so schneidet das Bild $\overline{D}_1$ von $\overline{\mathfrak{D}}_1$ das Dreieck D_2 in einer Strecke $\bar{s}$, die sich in p an s anschließt, und diese Fortsetzung $\bar{s}$ von s ist mitsamt ihren beiden Originalstrecken in $\mathfrak{E}$ eindeutig bestimmt. Schließt sich dagegen an $\mathfrak{d}_1$ kein von $\mathfrak{D}_1$ verschiedenes Dreieck mehr an, so gehört $\mathfrak{d}_1$ zum Rande $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{E}$, die Bildstrecke d_1 gehört zu K, und der Punkt p ist Randsingularität von E. In diesem Falle läßt sich die Doppellinie nicht über p hinaus fortsetzen; in E brechen die Originale der Doppellinie in $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ ab, und durch diese beiden Punkte gehen, wegen der Voraussetzung der Einfachheit der Randsingularitäten, auch Originale anderer Doppelstrecken nicht hindurch. — Haben $\mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{D}_2$ eine Ecke $\mathfrak{e}_{12}$ gemeinsam, so ist der entsprechende Punkt e im R^3 ein Endpunkt der Doppelstrecke s; für den anderen Endpunkt — er heiße p — liegt wieder einer der beiden schon besprochenen Fälle vor. Es liegt also in $\mathfrak{D}_1$ eine Strecke $\mathfrak{s}_1 = \mathfrak{e}_{12}\mathfrak{p}_1$, in $\mathfrak{D}_2$ eine Strecke $\mathfrak{s}_2 = \mathfrak{e}_{12}\mathfrak{p}_2$ als Original von s, und zwar werden $\mathfrak{s}_1$ und $\mathfrak{s}_2$ so auf s abgebildet, daß $\mathfrak{e}_{12}$ in e, $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ in p übergehen. In diesem Falle heißt e ein Windungspunkt von E. Von e könnten noch weitere Doppelstrecken ausgehen, die dadurch entstehen, daß noch andere Dreiecke mit der gemeinsamen Ecke e sich im R^3 in derselben Weise schneiden wie D_1 und D_2. Jedoch kann man bekanntlich solche „mehrfachen" Windungspunkte immer vermeiden[18]); es wird daher im folgenden angenommen, daß alle Windungspunkte von E einfach, d. h. Endpunkte von genau *einer* Doppellinie sind.

Insgesamt besteht E aus endlich vielen Dreiecken; zum Aufbau von Doppellinien stehen also nur endlich viele Doppelstrecken zur Verfügung. Verfolgt man, von einer beliebigen Doppelstrecke ausgehend, eine Doppellinie in einer Richtung immer weiter, so tritt einer der folgenden Fälle ein: (1) nach endlich vielen Schritten kommt man zur Ausgangsstrecke zurück, die Doppellinie ist geschlossen; (2) die Doppellinie endet in einer Randsingularität; (3) die Doppellinie endet in einem Windungspunkt. In den beiden letzten Fällen ist die Doppellinie offen; daher muß

[18]) Wie man leicht sieht, führt das im folgenden bei der Beseitigung der Doppellinien vom Typus (d) benutzte Verfahren des Aufschneidens und Wiederzusammenheftens von $\mathfrak{E}$, angewandt auf eine von einem mehrfachen Windungspunkt ausgehende Doppelstrecke, zur Aufspaltung des mehrfachen Windungspunktes in mehrere Windungspunkte geringerer Vielfachheit; dabei ist die Summe der Vielfachheiten der neuen Windungspunkte höchstens gleich der Vielfachheit des ursprünglichen, so daß endlichoftmalige Anwendung dieses Verfahrens zum Ziel führt.

auch beim Verfolgen derselben Doppellinie in der entgegengesetzten Richtung einer der beiden Fälle (2) oder (3) eintreten. Es sind also auf E folgende Typen von Doppellinien möglich: (a) geschlossene Doppellinien, (b) offene Doppellinien, deren beide Endpunkte Randsingularitäten sind, (c) offene Doppellinien, deren beide Endpunkte Windungspunkte sind, und (d) offene Doppellinien, die eine Randsingularität mit einem Windungspunkte verbinden.

Von jeder Randsingularität von E geht eine eindeutig bestimmte Doppellinie des Typus (b) oder (d) aus. Jeder Doppellinie des Typus (b) ist ein Paar von Randsingularitäten, nämlich ihre Endpunkte, zugeordnet; Randsingularitätenpaare, die zu verschiedenen Doppellinien des Typus (b) gehören, sind zueinander fremd. Wenn also die Anzahl der Randsingularitäten von E ungerade ist, so muß mindestens eine Doppellinie des Typus (d) auftreten. In diesem Falle wird das Dehnsche Verfahren der „Umschaltung" längs der offenen Doppellinien dazu führen, ohne Vermehrung der Randsingularitäten alle Doppellinien des Typus (d) zu beseitigen. Nach Beendigung des Verfahrens kann also nur noch eine gerade Anzahl von Randsingularitäten übrig sein, die dann notwendig kleiner ist als die ursprüngliche Anzahl der Randsingularitäten von E. Die für ein von K berandetes Element notwendige Anzahl der Randsingularitäten muß also, da sie nicht mehr verkleinert werden kann, gerade sein.

Zunächst schildern wir die *Beseitigung einer Doppellinie des Typus* (d) in einem besonders einfachen Falle: l sei eine Doppellinie vom Typus (d), die eine Randsingularität p mit einem Windungspunkt e verbindet. Die Originale $\mathfrak{l}_1$ und $\mathfrak{l}_2$ von l seien doppelpunktfrei und bis auf $\mathfrak{e}_{12}$, das Original des Windungspunktes e, zueinander fremd. Von den Originalen von p liegt eines — es sei der Endpunkt $\mathfrak{p}_1$ von $\mathfrak{l}_1$ — auf dem Rande $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{E}$, das andere — der Endpunkt $\mathfrak{p}_2$ von $\mathfrak{l}_2$ — im Innern eines Dreiecks von $\mathfrak{E}$. Die Bezeichnungen $\mathfrak{l}_1$, $\mathfrak{l}_2$ sollen für die mit Richtung von $\mathfrak{e}_{12}$ nach $\mathfrak{p}_1$ oder $\mathfrak{p}_2$ versehenen Linien gebraucht werden; die entgegengesetzt gerichteten Linien werden, wie üblich, mit $\mathfrak{l}_1^{-1}$, $\mathfrak{l}_2^{-1}$ bezeichnet. Die Triangulation von $\mathfrak{E}$ wird verfeinert, so daß die Linien $\mathfrak{l}_1$ und $\mathfrak{l}_2$ auf Seiten der verfeinerten Triangulation verlaufen und Punkte von $\mathfrak{l}_1$ und $\mathfrak{l}_2$, die auf denselben Punkt von l abgebildet werden, gleichzeitig Ecken oder innere Punkte von Seiten der Triangulation sind. Dann schneide man das Element $\mathfrak{E}$ längs der doppelpunktfreien Linie $\mathfrak{l}_1^{-1}\mathfrak{l}_2$ auf, wobei jedoch im Punkte $\mathfrak{p}_1$ der Rand von $\mathfrak{E}$ nicht durchschnitten werden soll. Dadurch entsteht in $\mathfrak{E}$ ein den Rand $\mathfrak{R}$ berührendes Loch, das, wenn die beiden Ufer der Linie $\mathfrak{l}_1^{-1}\mathfrak{l}_2$ durch Überstreichen voneinander unterschieden werden, berandet wird von $\bar{\mathfrak{l}}_1^{-1}\bar{\mathfrak{l}}_2\,\mathfrak{l}_2^{\,1}\,\bar{\mathfrak{l}}_1$. Heftet man jetzt $\bar{\mathfrak{l}}_1$ mit $\bar{\mathfrak{l}}_2$, $\mathfrak{l}_1$

mit l_2 in der durch die Abbildung auf l vorgeschriebenen Weise zusammen, so entsteht ein Flächenstück $\mathfrak{E}'$, das offenbar wieder ein Element ist. Da $\mathfrak{E}'$ aus denselben Dreiecken besteht wie $\mathfrak{E}$ und außerdem bei der Zusammenheftung des Randes des Loches nur solche Punkte miteinander identifiziert worden sind, denen bei der Abbildung von $\mathfrak{E}$ auf E derselbe Bildpunkt entspricht, vermittelt die Abbildung von $\mathfrak{E}$ auf E zugleich eine Abbildung von $\mathfrak{E}'$ auf ein Element E' des R^3; E' ist dabei als Punktmenge mit E identisch, unterscheidet sich aber von dem entsprechend der verfeinerten Triangulation von $\mathfrak{E}$ unterteilten E durch die Art der Zusammenheftung der einzelnen Dreiecke längs l. Bei der Abbildung von $\mathfrak{E}'$ auf E' hat der Punkt p nur noch einen einzigen auf dem Rande $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{E}'$ gelegenen Originalpunkt $\mathfrak{p}_{12}$, da bei der Identifikation $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ miteinander verschmolzen worden sind, ist also für E' nicht mehr Randsingularität; der Punkt e hat dagegen in $\mathfrak{E}'$ zwei Originale $\mathfrak{e}_{12}$ und $\bar{\mathfrak{e}}_{12}$, die beim Aufschneiden von $\mathfrak{E}$ aus $\mathfrak{e}_{12}$ entstanden sind und bei der Zusammenheftung nicht wieder identifiziert werden. l hat in $\mathfrak{E}'$ zwei Originale $\mathfrak{l}_{12}$ und $\bar{\mathfrak{l}}_{12}$, die durch Identifikation von $\mathfrak{l}_1$ mit $\mathfrak{l}_2$ bzw. von $\bar{\mathfrak{l}}_1$ mit $\bar{\mathfrak{l}}_2$ entstanden sind und $\mathfrak{e}_{12}$ bzw. $\bar{\mathfrak{e}}_{12}$ mit $\mathfrak{p}_{12}$ verbinden. Ist s eine Teilstrecke von l, und bezeichnen $\mathfrak{D}_1$, $\bar{\mathfrak{D}}_1$, $\bar{\bar{\mathfrak{D}}}_2$, $\bar{\mathfrak{D}}_2$ diejenigen Dreiecke der verfeinerten Triangulation von $\mathfrak{E}$, die in dem aufgeschnittenen Element an die Originale $\mathfrak{s}_1$, $\bar{\mathfrak{s}}_1$, $\bar{\mathfrak{s}}_2$, $\bar{\bar{\mathfrak{s}}}_2$ von s angrenzen, so folgen ihre Bilddreiecke D_1, $\bar{D}_1$, $\bar{\bar{D}}_2$, $\bar{D}_2$ im R^3 bei zyklischem Umlauf um s in der Reihenfolge D_1, $\bar{\bar{D}}_2$, $\bar{D}_1$, $\bar{\bar{D}}_2$ (oder in der umgekehrten Reihenfolge) aufeinander; denn D_1 und $\bar{D}_1$ sind Teildreiecke eines Dreiecks D_1 der ursprünglichen Triangulation von E, ebenso sind $\bar{\bar{D}}_2$ und $\bar{D}_2$ Teildreiecke eines Dreiecks D_2, und D_1 und D_2 schneiden sich in s. In E' sind längs s D_1 und $\bar{\bar{D}}_2$, $\bar{D}_1$ und $\bar{D}_2$ zusammengeheftet; die Doppellinie l stellt also für E' eine Selbstberührung dar. Durch eine geeignete beliebig kleine Verrückung der Ecken von E' kann die allgemeine Lage von E' (mit den am Beginn dieses Paragraphen genannten zusätzlichen Voraussetzungen) wieder hergestellt und die Selbstberührung von E' ohne Auftreten neuer Singularitäten beseitigt werden.

Ist E irgendein von K berandetes Element, das eine ungerade Anzahl von Randsingularitäten, also wenigstens eine Doppellinie vom Typus (d) besitzt, so ist die geschilderte Verminderung der Anzahl der Randsingularitäten im allgemeinen nicht ohne weiteres durchführbar, weil die bei der Beseitigung der Doppellinie gemachten Voraussetzungen nicht erfüllt zu sein brauchen. Dieser Fall wird durch folgende *Reduktion* auf den früheren zurückgeführt: e sei ein Windungspunkt von E, l eine von e ausgehende offene Doppellinie des Typus (d), deren von dem

Punkt e_{12} ausgehenden Originale l_1 und l_2 in $\mathfrak{E}$ Doppelpunkte haben oder einander schneiden. Ist q ein Schnittpunkt von l_1 und l_2, so entspricht dem Punkte $q = q_1$ von l_1 vermöge der durch l vermittelten Zuordnung auf l_2 ein von q_1 verschiedener Punkt q_2; andernfalls wäre nämlich q Windungspunkt und somit gemeinsamer Endpunkt der Linien l_1 und l_2. Infolgedessen kann man auf l einen Punkt p bestimmen, so daß die Originale $l_1^* = e_{12}p_1$ und $l_2^* = e_{12}p_2$ des durch e und p bestimmten Teiles l^* von l zueinander fremd und doppelpunktfrei sind, aber auf wenigstens einer der Linien l_1^*, l_2^* ein Doppelpunkt von l_1 oder l_2 oder ein Schnittpunkt von l_1 mit l_2 liegt; p_1 und p_2 selbst seien weder Doppelpunkte noch Schnittpunkte von l_1 und l_2. Man kann dann ähnlich verfahren wie früher: Die Triangulation von E wird verfeinert, so daß l_1^* und l_2^* auf Seiten der Triangulation verlaufen und entsprechende Punkte von l_1^* und l_2^* gleichzeitig Ecken oder innere Punkte von Seiten der Triangulation sind. l_1^* und l_2^* mögen die von e_{12} nach p_1 und p_2 gerichteten Linien bezeichnen. Man schneide das Element E längs der doppelpunktfreien Linie $l_1^{*-1}l_2^*$ auf. Dadurch entsteht in $\mathfrak{E}$ ein von $\bar{l}_1^{*-1}\bar{l}_2^*\bar{l}_2^{*-1}\bar{l}_1^*$ berandetes Loch (Überstreichen bezeichnet wieder die beiden Ufer der Linie $l_1^{*\,1}l_2^*$). Heftet man jetzt $\bar{l}_1^*$ mit $\bar{\bar{l}}_2^*$, $\bar{\bar{l}}_1^*$ mit $\bar{l}_2^*$ zusammen, so daß die bei der Abbildung auf l zusammenfallenden Punkte miteinander identifiziert werden, so entsteht wieder ein neues Element $\mathfrak{E}'$. Durch die Abbildung von $\mathfrak{E}$ auf E ist zugleich eine Abbildung von $\mathfrak{E}'$ auf ein als Punktmenge mit E zusammenfallendes Element E' definiert. Der Punkt e hat in $\mathfrak{E}'$ zwei Originale $\bar{e}_{12}$ und $\bar{\bar{e}}_{12}$, die beim Aufschneiden aus e_{12} entstanden sind. Der Punkt p hat dagegen in $\mathfrak{E}'$ nur noch ein durch Identifikation von p_1 und p_2 entstandenes Original p_{12}. Originale von l in $\mathfrak{E}'$ sind zwei bis auf p_{12} zueinander fremde doppelpunktfreie Linien $\bar{l}_{12}$ und $\bar{\bar{l}}_{12}$, die durch Identifikation von $\bar{l}_1$ mit $\bar{\bar{l}}_2$ bzw. von $\bar{\bar{l}}_1$ mit $\bar{l}_2$ entstanden sind und $\bar{e}_{12}$ bzw. $\bar{\bar{e}}_{12}$ mit p_{12} verbinden. Die Linie l ist — wie früher — für das Element E' eine Selbstberührung, die durch beliebig kleine Verrückung der Ecken von E' beseitigt werden kann, ohne daß dabei neue Singularitäten auftreten; zugleich kann durch die Verrückung die allgemeine Lage von E' (mit den in diesem Paragraphen gemachten zusätzlichen Voraussetzungen) wieder hergestellt werden. Bei der Verrückung wird der Punkt e, entsprechend der Existenz zweier Originale in $\mathfrak{E}'$, in zwei Punkte aufgespalten. Der Punkt p dagegen bleibt ungespalten; von p geht eine Doppellinie aus, die in einem gewissen Anfangsstück mit dem nicht zu l^* gehörigen Teil der alten Doppellinie l übereinstimmt; in der Tat beginnen infolge der Identifikation von p_1 und p_2 die Originale des nicht zu l^* gehörigen Stückes von l in $\mathfrak{E}'$ beide im Punkte p_{12}. p ist also Windungspunkt geworden. In

ihrem weiteren Verlauf wird die von p ausgehende Doppellinie im allgemeinen nicht mit der alten Doppellinie l übereinstimmen; denn beim Aufschneiden von $\mathfrak{E}$ längs $l_1^* \, {}^1 l_2^*$ sind die Originale von l in jedem auf $l_1^* - {}^1 l_2^*$ gelegenen Doppelpunkt oder Schnittpunkt von l_1 und l_2 zerschnitten und bei der Identifikation in anderer Weise miteinander oder mit anderen gleichfalls beim Aufschneiden durchschnittenen Originalen von Doppellinien zusammengeheftet worden. Insbesondere ist es nicht notwendig, daß die in E' von p ausgehende Doppellinie in demselben Punkte endet wie die alte Doppellinie l.

Nach der „Reduktion" ist die Anzahl der Randsingularitäten von E' dieselbe wie von E, also ebenfalls ungerade. Es gibt daher in E' wieder wenigstens eine Doppellinie l' des Typus (d). Entweder kann diese Doppellinie — und damit die Randsingularität, in der sie endet — nach dem zuerst geschilderten Verfahren beseitigt werden, oder die Originale von l' in $\mathfrak{E}'$ weisen Doppelpunkte oder Schnittpunkte miteinander auf, so daß auf E' unter Benutzung der Doppellinie l' die „Reduktion" nochmals angewandt werden kann. Die Reduktion führt jedesmal zu einer Verminderung der Anzahl z der in der Originalmenge aller Doppellinien auftretenden Doppelpunkte; denn wenigstens eines der Originale l_1^* und l_2^* der durch die Reduktion beseitigten Linie l^* weist nach Voraussetzung mindestens einen Schnittpunkt mit den Originalen des nicht zu l^* gehörigen Teiles von l auf, und dieser Schnittpunkt verschwindet bei Beseitigung von l^*[19]). Da z endlich ist, kann die Reduktion nur endlich oft wiederholt werden, es muß also einmal — und zwar nach höchstens z Reduktionen — ein Fall eintreten, in dem die Beseitigung einer Doppellinie des Typus (d) und der durch sie bedingten Randsingularität möglich ist.

§ 4.

Die mehrfachen Sehnen eines Knotens. Beweis des Hauptsatzes II.

Der Beweis des Hauptsatzes II kann mit derselben Methode geführt werden wie der des Hauptsatzes I: Jede vierfache Sehne des einfach geschlossenen Polygons K wird gedeutet als eine Gerade, auf der der erste und dritte Schnittpunkt einer dreifachen Sehne zusammenfällt mit dem ersten und zweiten Schnittpunkt einer anderen dreifachen Sehne.

[19]) An dieser Stelle wird von der Voraussetzung der Einfachheit des Windungspunktes e Gebrauch gemacht. Wäre nämlich e ein Windungspunkt genügend hoher Vielfachheit, so könnten sich beim Aufschneiden und Wiederzusammenheften von $\mathfrak{E}$ mehrere Paare der in e endenden Doppellinien in E' zu je einer Doppellinie zusammensetzen, und dadurch könnten neue Doppelpunkte im System der Originale der Doppellinien auf $\mathfrak{E}'$ entstehen, was eine Vergrößerung von z bewirken würde.

Im folgenden sei K ein einfach geschlossenes Polygon im R^3 in allgemeiner Lage, und k sei die Verknotungszahl von K.

Hilfssatz XI[20]. Jeder Punkt von K ist Anfangspunkt von wenigstens k dreifachen Sehnen von K.

Beweis. p_0 sei ein fester Punkt von K; r sei die Anzahl der von p_0 ausgehenden dreifachen Sehnen. K' sei derjenige Teilstreckenzug von K, der aus allen und nur den Seiten von K besteht, denen p_0 nicht angehört. Wenn der Punkt p den Streckenzug K' durchläuft, überstreichen die Sehnen $p_0 p$ ein von K berandetes Elementarflächenstück E. Jedesmal, wenn zwischen p_0 und p noch ein Schnittpunkt q von $p_0 p$ mit K liegt, ist q Randsingularität von E. Weitere Randsingularitäten können nicht auftreten; inbesondere ist auch der Punkt p_0 keine Randsingularität von E. Die Anzahl der Randsingularitäten von E ist also gleich r, und daher $r \geqq k$.

In der Menge der dreifachen Sehnen von K können Umgebungen in derselben Weise definiert werden wie in § 2 in der Menge der Sehnen mit der Schnittfolge (A, B, A). Unter einem Elementarbestandteil E_{123} der Menge der dreifachen Sehnen soll wieder die Gesamtheit der dreifachen Sehnen von K verstanden werden, deren erster, zweiter und dritter Schnittpunkt mit K der Reihe nach drei vorgegebenen Seiten s_1, s_2, s_3 von K angehören[21]. Die Untersuchung der Elementarbestandteile der Menge der dreifachen Sehnen wird in derselben Weise durchgeführt wie in § 2. Neben die dort beschriebenen Möglichkeiten für die Struktur eines Elementarbestandteiles tritt jetzt noch eine weitere: ein Elementarbestandteil der Menge der dreifachen Sehnen von K kann einem einseitig abgeschlossenen Intervall homöomorph sein. Wenn nämlich die beiden Seiten s_1 und s_2 eine Ecke e gemeinsam haben und s_3 die durch s_1 und s_2 bestimmte Ebene in einem solchen Punkte p_3 schneidet, daß der Elementarbestandteil E_{123} nicht leer ist, so häufen sich die Sehnen von E_{123} gegen die Gerade $e p_3$, die einem Intervallendpunkt entspricht, aber nicht mehr zu E_{123} gehört, da sie nur zwei Schnittpunkte mit K aufweist. Das Analogon des Hilfssatzes VI lautet also:

Hilfssatz XII. Jeder nicht leere Elementarbestandteil der Menge der dreifachen Sehnen von K ist entweder einem einseitig abgeschlossenen oder einem beiderseits abgeschlossenen Intervall homöomorph. Ein nicht leerer Elementarbestandteil enthält — je nachdem, welcher der beiden Fälle vorliegt — genau eine oder genau zwei Eckensehnen, die

---

[20]) Vgl. Fußnote [15]).

[21]) Während bei der Formulierung des Hauptsatzes II in der Einleitung von der Richtung der Sehne abgesehen wurde, ist es für den Beweis zweckmäßig, die Sehnen wieder als gerichtet anzusehen.

dem einen bzw. den beiden zum Intervall gehörigen Endpunkten entsprechen. Der Durchschnitt zweier Elementarbestandteile ist entweder leer oder er besteht genau aus einer Eckensehne. Jede Eckensehne gehört zu genau zwei Elementarbestandteilen.

Aus Hilfssatz XII ergibt sich ähnlich wie in § 2 für den Aufbau der Menge der dreifachen Sehnen von K:

Folgerung aus Hilfssatz XII. Die Menge der dreifachen Sehnen von K besteht aus endlich vielen Komponenten. Jede Komponente ist entweder einer einfach geschlossenen Kurve oder einem einfachen Bogen mit Ausschluß der Endpunkte homöomorph.

Wir definieren eine Abbildung der Sehnen $p_1 p_2$ von K auf die universelle Überlagerungsmannigfaltigkeit eines Kreisringes, einen von zwei parallelen Geraden in der Ebene begrenzten Streifen S, durch die folgende Vorschrift: $\varkappa$ sei ein auf dem Polygon K stetiger, eigentlich monotoner Parameter, der so normiert ist, daß sich sein Wert bei einmaligem Umlauf um K um ± 1 ändert. $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ seien die nur mod 1 bestimmten, den Punkten p_1 bzw. p_2 entsprechenden Parameterwerte. Bildpunkte der Sehne $p_1 p_2$ im Streifen S: $0 \leqq y \leqq 1$ der x-y-Ebene sollen diejenigen Punkte sein, deren Koordinaten durch

$$x = \varkappa_1, \quad y \equiv \varkappa_2 - \varkappa_1 \pmod 1, \quad 0 \leqq y \leqq 1$$

bestimmt sind. Wenn p_1 und p_2 voneinander verschieden sind, also $\varkappa_2 - \varkappa_1$ keine ganze Zahl ist, wird dadurch jeder gerichteten Sehne von K genau ein System von Punkten zugeordnet, die bei den Decktransformationen des Streifens $(\mathfrak{t}_m)$: $x' = x + m$, $y' = y$ $(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ miteinander äquivalent sind. Verschiedenen Sehnen entsprechen verschiedene Punktsysteme. Ist $\varkappa_2 - \varkappa_1$ eine ganze Zahl, ist also $p_1 = p_2$ und die Sehne in einen Punkt entartet, so entsprechen ihr zwei verschiedene Systeme von äquivalenten Punkten, nämlich ein System auf der Geraden $y = 0$, ein zweites auf $y = 1$.

Der Menge der dreifachen Sehnen von K ordnen wir zwei in verschiedener Weise definierte Bildmengen im Streifen S zu:

M_{12} sei die Menge derjenigen Punkte von S, die Bild der Teilsehne $p_1 p_2$ einer dreifachen Sehne $p_1 p_2 p_3$ von K sind. Ein Punkt x, y von S ist als Punkt der Menge M_{12} i-fach zu zählen, wenn auf der ihm zugeordneten Sehne $p_1 p_2$ hinter p_2 noch i Schnittpunkte mit K liegen[22]).

[22]) Wegen der allgemeinen Lage ist die Forderung, daß zwei Schnittpunkte einer dreifachen Sehne mit K niemals zu derselben Polygonseite gehören sollen, von selbst erfüllt; infolgedessen sind die Vielfachheiten der Punkte von M_{12} und M_{13} immer endlich.

M_{13} sei die Menge derjenigen Punkte von S, die Bild der durch eine dreifache Sehne $p_1 p_2 p_3$ bestimmten Sehne $p_1 p_3$ sind. Ein Punkt x, y ist in der Menge M_{13} j-fach zu zählen, wenn auf der ihm zugeordneten Sehne $p_1 p_3$ zwischen p_1 und p_3 noch j Schnittpunkte mit K liegen[22]).

Gehört der Punkt x, y dem Durchschnitt M_{123} von M_{12} und M_{13} an, so stellt sein Original $p_1 p_3$ den ersten und dritten Schnittpunkt einer vierfachen Sehne von K dar. Ist x, y ein i-facher Punkt von M_{12} und ein j-facher Punkt von M_{13}, so gibt es $i \cdot j$ Möglichkeiten, p_1 und p_3 als ersten und dritten Punkt einer vierfachen Sehne von K zu deuten; demgemäß ist ein solcher Punkt als Punkt von M_{123} $(i \cdot j)$-fach zu zählen. Umgekehrt wird jede vierfache Sehne $p_1 p_2 p_3 p_4$ von K (unter Beachtung ihrer Richtung) nur durch ein ihrem ersten und dritten Schnittpunkt entsprechendes System von äquivalenten Punkten in M_{123} dargestellt. Dabei besitzen aber die beiden Sehnen $p_1 p_2 p_3 p_4$ und $p_4 p_3 p_2 p_1$, die für den Hauptsatz II als nicht verschieden anzusehen sind, in M_{123} wesentlich verschiedene Bildpunkte. Zum Beweis des Hauptsatzes II ist also zu zeigen: Der Durchschnitt M_{123} von M_{12} und M_{13} enthält bei richtiger Zählung der Vielfachheiten wenigstens k^2 wesentlich verschiedene Punkte.

Die Abbildung der Elementarbestandteile der Menge der dreifachen Sehnen von K geschieht genau nach Hilfssatz VI, mit dem einzigen Unterschied, daß den einseitig offenen Elementarbestandteilen Elementarbogen mit Ausschluß eines Endpunktes entsprechen. Es gilt demnach:

Hilfssatz XIII. Jede der Mengen M_{12} und M_{13} ist aufgebaut aus endlich vielen wesentlich verschiedenen einfachen Elementarbogen, eventuell mit Ausschluß eines Endpunktes, und den damit äquivalenten Bogen. Das Auftreten von mehrfachen Punkten, die dem Durchschnitt mehrerer wesentlich verschiedener (und sich nicht in einem gemeinsamen Endpunkt zusammenschließender) Elementarbogen angehören, ist durch Hilfssatz VI bestimmt.

Hilfssatz XIV. Die Menge M_{13} hat eine positive Minimalentfernung von den Geraden $y = 0$ und $y = 1$.

Beweis. Aus der Untersuchung der Elementarbestandteile der Menge der dreifachen Sehnen folgt leicht, daß der erste und dritte Schnittpunkt einer dreifachen Sehne bei Annäherung an den Rand eines Elementarbestandteiles nicht gegen denselben Punkt von K konvergieren können.

Hilfssatz XV. Jeder im Innern von S (also in $0 < y < 1$) verlaufende Kurvenbogen $\mathfrak{C}$, der einen Punkt x, y mit dem bei t_1 äquivalenten Punkt $x + 1, y$ verbindet, schneidet die Menge M_{12} in wenigstens k Punkten.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf man annehmen, daß $\mathfrak{C}$ einen Punkt mit den Koordinaten 0, y_0 mit dem Punkt 1, y_0 verbindet. $\mathfrak{C}$ habe r Schnittpunkte mit M_{12}.

Eine Parameterdarstellung von $\mathfrak{C}$ sei gegeben durch

$$x = \varphi(s), \quad y = \psi(s) \quad (0 \leqq s \leqq 1), \tag{1}$$

wobei

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(1) = 1$$
$$\psi(0) = y_0, \quad \psi(1) = y_0 \tag{1'}$$

ist. Durch

$$\varkappa_2 = \varphi(\varkappa) + \psi(\varkappa) \quad (0 \leqq \varkappa \leqq 1) \tag{2}$$

ist wegen der aus (1') folgenden Bedingung

$$\varkappa_2(1) = \varkappa_2(0) + 1 \tag{2'}$$

eine Abbildung von K auf sich vom Grade $+1$ definiert; das durch $\varkappa_2(\varkappa)$ vermittelte Bild K_2 von K läßt sich also durch eine stetige Deformation von K in sich herstellen.

Jedem Punkt $p_2(\varkappa)$, der dem Parameterwert $\varkappa_2(\varkappa)$ entspricht, ist mittels der Kurve $\mathfrak{C}$ eine in ihm endende Sehne $p_1(\varkappa)\,p_2(\varkappa)$ von K zugeordnet durch die Festsetzung: $p_1(\varkappa)$ soll der zum Parameterwert $\varphi(\varkappa)$ gehörige Punkt von K sein. Diese Sehnenschar hängt stetig von $\varkappa$ ab und schließt sich wegen (1') nach einem Umlauf um K_2. Eine solche Sehne $p_1(\varkappa)\,p_2(\varkappa)$ besitzt nur dann einen hinter $p_2(\varkappa)$ gelegenen Schnittpunkt mit K, wenn der zum Parameterwert $s = \varkappa$ gehörige Punkt von $\mathfrak{C}$ zu M_{12} gehört; ist dieser Punkt ein i-facher Punkt von M_{12}, so liegen auf der Sehne i Schnittpunkte mit K hinter $p_2(\varkappa)$. Insgesamt treten also in der Sehnenschar genau r hinter den $p_2(\varkappa)$ gelegene Schnittpunkte mit K auf.

Zunächst konstruieren wir ein von K_2 berandetes — allerdings nicht aus Dreiecken aufgebautes — Elementarflächenstück E_2, das von K in genau r inneren Punkten geschnitten wird. Dazu bringe man in jedem Punkt $p_2(\varkappa)$ von K_2 den hinter $p_2(\varkappa)$ gelegenen Teil des Halbstrahls $p_1(\varkappa)\,p_2(\varkappa)$ an; alle diese Halbstrahlen werden auf einer hinreichend großen, K im Innern enthaltenden Kugel Q abgeschnitten, und in die auf Q gelegene Schnittkurve K_3 wird ein auf Q oder im Außenraum von Q gelegenes Element eingespannt. Schnittpunkte des so definierten Elements E_2 mit K sind offenbar alle und nur die Punkte, in denen die Sehnen $p_1(\varkappa)\,p_2(\varkappa)$ das Polygon K hinter $p_2(\varkappa)$ schneiden.

Durch Abänderung des Elements E_2 in der Nähe des Randes K_2 kann man E_2 durch ein von K berandetes Element E ersetzen, das genau r Randsingularitäten besitzt. Dazu führt die folgende Konstruktion: K_2^* sei diejenige auf E_2 gelegene Nachbarkurve von K_2, deren Punkte

$p_2^*(\varkappa)$ $(0 \leqq \varkappa \leqq 1)$ in festem Abstand λ hinter $p_2(\varkappa)$ auf den Halbstrahlen $p_1(\varkappa)\,p_2(\varkappa)$ liegen; $\lambda\,(>0)$ sei dabei so klein gewählt, daß der zwischen K_2 und K_2^* gelegene Teil von E_2 keinen Schnittpunkt mit K enthält. Das von K_2^* berandete Teilelement E_2^* von E_2 wird also von K genau r-mal geschnitten. Nun schließe man das Polygon K in einen Torus T von so kleinem Querschnitt ein, daß K_2^* ganz außerhalb von T liegt. Auf T gibt es eine doppelpunktfreie Kurve K', die im Außenraum von T homotop zu K_2^* ist, also dort zusammen mit K_2^* ein (im allgemeinen nicht singularitätenfreies) zweirandiges Band B^* berandet. K' ist im Innern von T homotop zu K_2, also auch zu K, und K' und K beranden im Innern von T offenbar sogar ein singularitätenfreies zweirandiges Band B. Ein von K berandetes Element E mit genau r Randsingularitäten erhält man, wenn man an den Rand K_2^* von E_2^* das Band B^*, dann an den freien Rand K' von B^* das Band B anheftet.

Ersetzt man das Element E, das noch nicht aus Dreiecken aufgebaut ist, also bei der Definition von k nicht in Betracht kommt, durch eine Approximation, die den in der Einleitung gestellten Forderungen genügt und höchstens r Randsingularitäten besitzt, so folgt aus der Definition von k: $r \geqq k$.

Bei der Durchführung der Approximation von E kommt es offenbar nur auf die Approximation des von K_2^* und K_3 berandeten Bandes an, das die Randsingularitäten von E enthält. Denn der Torus T, die Kurve K' und das Band B können von vornherein aus Dreiecken und geradlinigen Strecken unter Berücksichtigung der Bedingung der allgemeinen Lage aufgebaut werden. Ferner können B^* und der außerhalb der Kugel Q gelegene Teil von E, die beide zu K fremd sind, so gut approximiert werden, daß die Approximationen ebenfalls zu K fremd sind. Um die Möglichkeit der Approximation des von K_2^* und K_3 berandeten Flächenstückes F ohne Vermehrung der Schnittpunkte mit K zu erkennen, hat man zu zeigen, daß die Schnittpunkte von K mit F einfach sind, d. h. daß eine hinreichend kleine Umgebung eines solchen Schnittpunktes auf F als eineindeutiges stetiges Bild eines Elementarflächenstückes aufgefaßt werden kann; denn ein Schnittpunkt mit K, für den die Bedingung der Einfachheit nicht erfüllt ist, wird im allgemeinen bei Approximation von F in mehrere Schnittpunkte aufgespalten werden. Statt den Nachweis für die Einfachheit der Schnittpunkte mit K für F selbst zu führen, kann man dabei F durch ein Flächenstück F' ersetzen, das genau ebenso viele Schnittpunkte mit K besitzt wie F, und das F mit der erforderlichen Genauigkeit approximiert. Ein solches Flächenstück F' — allerdings noch immer nicht aus Dreiecken aufgebaut — ist unmittelbar durch die beim Beweis des Hilfssatzes IX (letzter Absatz) durchgeführte Kon-

struktion einer polygonalen Deformation von B_1' in B_2' gegeben. Wenn man nämlich nach dem dort beschriebenen Verfahren unter Berücksichtigung der Zusatzforderung in Fußnote [16]) eine polygonale Approximation K_2' von K_2^*, eine polygonale Approximation K_3' von K_3 und eine polygonale Deformation von K_2' in K_3' definiert hat (wobei jetzt K die Rolle des Polygons A im Hilfssatz IX übernimmt), so ist für das bei der Deformation von K_2' überstrichene Flächenstück F' die geforderte Einfachheit der Schnittpunkte offenbar erfüllt. Die Approximation von F' durch ein aus Dreiecken aufgebautes Flächenstück bereitet keine Schwierigkeiten mehr und braucht hier nicht durchgeführt zu werden.

Hilfssatz XVI. Jeder im Streifen S verlaufende Kurvenbogen $\mathfrak{C}$, der einen Punkt der Geraden $y = 0$ mit einem Punkt der Geraden $y = 1$ verbindet, trifft die Menge M_{13} in wenigstens k Punkten.

Beweis. An die Ränder $y = 0$ und $y = 1$ von S schließen sich zwei (abgeschlossene) Bereiche S_0 bzw. S_1 an, die denjenigen Sehnen von K entsprechen, die ganz in eine Seite von K hineinfallen. Ist p_0 ein fester Punkt von K, $x = x_0$, $0 \leqq y \leqq 1$, eine Strecke in S, deren x-Wert dem Punkte p_0 entspricht, so gehören zu den im Punkte p_0 beginnenden Sehnen, deren Endpunkte auf K in Richtung wachsender Parameterwerte zwischen p_0 und der nächsten auf p_0 folgenden Ecke liegen, Punkte von S, die eine Strecke $x = x_0$, $0 \leqq y \leqq \bar{\eta}_0$ ($\bar{\eta}_0 > 0$), erfüllen; dabei bedeutet $\bar{\eta}_0$ die Parameterdifferenz zwischen der auf p_0 folgenden Ecke von K und p_0 selbst. Die Strecke $x = x_0$, $0 \leqq y \leqq \eta_0$, bildet den Durchschnitt der Strecke $x = x_0$, $0 \leqq y \leqq 1$, mit S_0. Entsprechend ist der Durchschnitt von S_1 mit $x = x_0$, $0 \leqq y \leqq 1$, eine Strecke $x = x_0$, $0 \leqq y \leqq 1 - \bar{\eta}_0$ ($\bar{\eta}_0 > 0$), die denjenigen in p_0 beginnenden Sehnen entspricht, deren Endpunkte zwischen p_0 und der letzten p_0 vorhergehenden Ecke von K liegen. — Die Mengen S_0 und S_1 haben von M_{13} noch eine positive Minimalentfernung.

Die Kurve $\mathfrak{C}$ darf in der Nähe der Geraden $y = 0$ und $y = 1$ beliebig abgeändert werden, da dadurch die Anzahl ihrer Schnittpunkte mit M_{13} nicht geändert wird. Man darf also folgende Annahmen machen: $\mathfrak{C}$ verbinde den Punkt 0, 0 mit dem Punkt 0, 1; das Anfangsstück von $\mathfrak{C}$ falle mit dem Durchschnitt der Strecke $x = 0$, $0 \leqq y \leqq 1$, mit S_0 zusammen, das Endstück mit dem Durchschnitt von $x = 0$, $0 \leqq y \leqq 1$, mit S_1; abgesehen von dieser Anfangs- und Endstrecke sei $\mathfrak{C}$ fremd zu S_0 und S_1. Die Anzahl der Schnittpunkte von $\mathfrak{C}$ mit M_{13} sei gleich r.

Eine Parameterdarstellung von $\mathfrak{C}$ sei gegeben durch

$$x = \varphi(s), \quad y = \psi(s) \quad (0 \leqq s \leqq 1), \tag{1}$$

wobei

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(1) = 0, \tag{1'}$$

(1″) $$\psi(0) = 0, \quad \psi(1) = 1$$

ist. Durch

(2) $$\varkappa_1 = \varphi(\varkappa) \quad (0 \leqq \varkappa \leqq 1)$$

ist wegen (1′) eine Abbildung von K auf sich vom Grade Null definiert. Die Bildmenge K_1 kann daher stetig auf einen Punkt zusammengezogen werden. Eine zweite Abbildung von K auf sich wird durch

(3) $$\varkappa_3 = \varphi(\varkappa) + \psi(\varkappa) \quad (0 \leqq \varkappa \leqq 1)$$

definiert; diese Abbildung hat wegen der aus (1′) und (1″) folgenden Gleichung

(3′) $$\varphi(0) + \psi(0) = \varphi(1) + \psi(1) - 1$$

den Grad $+1$; die Bildmenge K_3 kann also durch eine stetige Deformation von K in sich hergestellt werden.

Den Punkten der Kurve $\mathfrak{C}$ entsprechen im R^3 gerade diejenigen Sehnen von K, die einen Punkt $p_1(\varkappa)$ von K_1 mit dem zum gleichen Parameterwert $\varkappa$ gehörigen Punkte $p_3(\varkappa)$ von K_3 verbinden. Dem Anfangspunkt 0, 0 von $\mathfrak{C}$ entspricht eine in einen Punkt $p_1(0) = p_3(0)$ entartete Sehne; daran schließen sich, der zu S_0 gehörigen Anfangsstrecke von $\mathfrak{C}$ entsprechend, Sehnen, deren Anfangspunkt mit $p_1(0)$ zusammenfällt und deren Endpunkte zwischen $p_1(0)$ und der nächsten auf $p_1(0)$ folgenden Ecke $\bar{e}$ von K liegen. Die folgenden Sehnen sind alle nicht entartet und haben — wegen der allgemeinen Lage von K — auch keine Teilstrecke mit einer Seite von K gemeinsam, bis auf diejenigen Sehnen, die der zu S_1 gehörigen Endstrecke von $\mathfrak{C}$ entsprechen. Der Anfangspunkt dieser letzten Sehnen ist wieder der Punkt $p_1(0) = p_1(1)$, ihre Endpunkte liegen zwischen $p_1(1)$ und der letzten dem Punkt $p_1(1)$ vorhergehenden Ecke e von K; dem Endpunkt von $\mathfrak{C}$ entspricht wieder die in einen Punkt $p_1(1) = p_3(1)$ entartete Sehne. Diejenigen Sehnen, die dem außerhalb von S_0 und S_1 verlaufenden Teil von $\mathfrak{C}$ entsprechen, weisen genau ebenso viele Schnittpunkte mit K zwischen $p_1(\varkappa)$ und $p_3(\varkappa)$ auf, wie die Kurve $\mathfrak{C}$ Schnittpunkte mit M_{13} besitzt, also im ganzen r. Das Flächenstück, das von den den Punkten von $\mathfrak{C}$ zugeordneten Strecken $p_1(\varkappa)\, p_3(\varkappa)$ $(0 \leqq \varkappa \leqq 1)$ überstrichen wird, kann nun — ähnlich wie bei dem Beweis des vorigen Hilfssatzes — zur Konstruktion eines von K berandeten Elementarflächenstückes mit höchstens r Randsingularitäten benutzt werden. Daraus folgt dann wieder $r \geqq k$.

$\bar{\varkappa}$ sei der kleinste Wert von $\varkappa$, $0 \leqq \varkappa \leqq 1$, für den $p_3(\bar{\varkappa}) = \bar{e}$ gilt, ebenso $\bar{\bar{\varkappa}}$ der größte Wert von $\varkappa$, für den $p_3(\varkappa) = \bar{e}$ ist. Den Teilintervallen $0 \leqq \varkappa \leqq \bar{\varkappa}$ und $\bar{\bar{\varkappa}} \leqq \varkappa \leqq 1$ von K sind also — nach den speziellen Voraussetzungen über den Verlauf von $\mathfrak{C}$ — gerade diejenigen Sehnen $p_1(\varkappa)\, p_3(\varkappa)$ zugeordnet, die dem zu S_0 bzw. zu S_1 gehörigen

Anfangs- und Endstück von $\mathfrak{C}$ entsprechen und in die Strecke $p_1(0)\,\bar{e}$ bzw. $p_1(0)\,e$ hineinfallen. $\bar{\bar{K}}_3$ bezeichne das Bild des durch $\bar{\varkappa} \leqq \varkappa \leqq \varkappa$ bestimmten Teiles von K bei der Abbildung (3); ferner sei $\bar{K}$ derjenige Teil von K, der von $\bar{e}$ und e begrenzt wird und den Punkt $p_3(0)$ nicht enthält. Dann läßt sich K_3 auf K unter Festhaltung der Endpunkte stetig in K deformieren; das folgt unmittelbar daraus, daß das Bild K_3 von K, das sich stetig in K deformieren läßt, sich aus K_3 und den beiden (bei der Abbildung einfach bedeckten) Strecken $\bar{e}\,p_3(0)$ und $\bar{p}_3(0)\,\bar{\bar{e}}$ zusammensetzt, während K aus $\bar{K}$ und denselben beiden Strecken besteht. — $\bar{K}_3''$ sei diejenige Nachbarkurve von $\bar{K}_3$, deren Punkte $\bar{p}_3''(\varkappa)$, $\bar{\varkappa} \leqq \varkappa \leqq \varkappa$, auf $p_1(\varkappa)\,p_3(\varkappa)$ in konstantem Abstand λ vor $p_3(\varkappa)$ liegen; λ sei dabei so gewählt, daß auf den Strecken $\bar{p}_3''(\varkappa)\,p_3(\varkappa)$ keine Schnittpunkte mit K liegen, außerdem sei λ höchstens gleich einem Drittel der Länge der Strecken $p_3(0)\,\bar{e}$ und $p_3(0)\,\bar{\bar{e}}$. — Z sei die Oberfläche einer „Zylinderumgebung" von $\bar{K}$, d. h. die Oberfläche des eineindeutigen stetigen Bildes eines (beiderseits beschränkten) Zylinders, das folgenden Bedingungen genügt: die Achse des Zylinders sei auf $\bar{K}$ abgebildet; der Grund- und Deckfläche des Zylinders mögen ebene Flächenstücke entsprechen, von denen das eine eine Teilstrecke $\bar{e}\,\bar{e}'$ von $\bar{e}\,p_3(0)$, das andere eine Teilstrecke von $\bar{\bar{e}}\,e'$ von $\bar{\bar{e}}\,p_3(0)$ enthält; abgesehen von $\bar{e}\,\bar{e}'$ und $\bar{\bar{e}}\,\bar{\bar{e}}'$ sei Z fremd zu den Strecken $\bar{e}\,p_3(0)$ und $\bar{\bar{e}}\,p_3(0)$. Außerdem soll Z so nahe bei $\bar{K}$ liegen, daß Z die Kurve $\bar{K}_3''$ ausschließt; insbesondere liegt also $\bar{e}'$ zwischen $\bar{e}$ und $\bar{e}''$, $\bar{\bar{e}}'$ zwischen $\bar{\bar{e}}$ und $\bar{\bar{e}}''$. Da $\bar{K}_3$ auf K stetig in K deformiert werden kann, gibt es auf Z eine doppelpunktfreie Kurve $\bar{K}_3'$ mit folgenden Eigenschaften: $\bar{K}_3'$ verbindet $\bar{e}'$ mit $\bar{\bar{e}}'$ und ist bis auf die Endpunkte fremd zu $\bar{e}\,\bar{e}'$ und $\bar{\bar{e}}\,\bar{\bar{e}}'$; $\bar{K}_3'$ berandet zusammen mit $\bar{K}$ und den Strecken $\bar{e}\,\bar{e}'$ und $e\,\bar{\bar{e}}'$ ein im Innern von Z gelegenes singularitätenfreies Elementarflächenstück E_1; $\bar{K}_3'$ läßt sich im Außenraum von Z so in $\bar{K}_3''$ deformieren, daß dabei die Endpunkte auf $\bar{e}'\,\bar{e}''$ bzw. $\bar{\bar{e}}'\,e''$ wandern und sonst bei der Deformation kein Schnittpunkt mit K auftritt, $\bar{K}_3'$ berandet also zusammen mit $\bar{K}_3''$ und den Strecken $\bar{e}'\,\bar{e}''$ und $\bar{\bar{e}}'\,\bar{\bar{e}}''$ im Außenraum von Z ein (nicht notwendig singularitätenfreies) Elementarflächenstück E_2, das bis auf die beiden Randstrecken $\bar{e}'\,\bar{e}''$ und $\bar{\bar{e}}'\,\bar{\bar{e}}''$ zu K fremd ist.

$\bar{\varkappa}$ und $\varkappa$ mögen dieselbe Bedeutung haben wie im vorigen Abschnitt. $\bar{K}_1$ sei das Bild des durch $\bar{\varkappa} \leqq \varkappa \leqq \varkappa$ definierten Teiles von K bei der Abbildung (2); da sowohl der durch $0 \leqq \varkappa \leqq \bar{\varkappa}$ als auch der durch $\varkappa \leqq \varkappa \leqq 1$ definierte Teil von K durch (2) auf den Punkt $p_1(0)$ abgebildet wird, ist $\bar{K}_1$ im wesentlichen mit K_1 identisch, kann also ebenso wie K_1 in K unter Festhaltung von $p_1(\bar{\varkappa}) = p_1(\bar{\varkappa}) = p_1(0)$ auf diesen Punkt zusammengezogen werden. $\bar{K}_1''$ sei eine Nachbarkurve zu $\bar{K}_1$, die durch

folgende Vorschrift definiert wird: $\mu(\varkappa)$, $\varkappa \leqq \varkappa \leqq \bar{\varkappa}$, sei eine stetige nicht negative Funktion; es sei $\mu(\varkappa) = \mu(\bar{\varkappa}) = 0$; für die von $\bar{\varkappa}$ und $\varkappa$ verschiedenen Werte von $\varkappa$ sei $\mu(\varkappa)$ positiv; das Maximum μ von $\mu(\varkappa)$ sei kleiner als die kleinste der Entfernungen $p_1(\varkappa)\, p_3''(\varkappa)$ und kleiner als die Entfernung jedes auf einer Sehne $p_1(\varkappa)\, p_3(\varkappa)$ gelegenen Schnittpunktes mit K von $p_1(\varkappa)$; ferner sei μ so klein, daß die Menge der Punkte, deren Entfernung von K höchstens gleich μ ist, noch eineindeutiges stetiges Bild eines Volltorus ist. $\bar{K}_1''$ soll nun aus denjenigen Punkten $\bar{p}_1''(\varkappa)$ bestehen, die auf der Sehne $p_1(\varkappa)\, p_3(\varkappa)$ im Abstand $\mu(\varkappa)$ hinter $p_1(\varkappa)$ liegen. — Offenbar berandet $\bar{K}_1''$ zusammen mit $\bar{K}_3''$ und den Strecken $p_1(0)\,\bar{e}''$ und $p_1(0)\, e''$ ein Elementarflächenstück E_3, das für $\bar{\varkappa} \leqq \varkappa \leqq \varkappa$ von den Strecken $\bar{p}_1''(\varkappa)\,\bar{p}_3''(\varkappa)$ überstrichen wird. E_3 hat mit K erstens die beiden zum Rande gehörigen Strecken $p_1(0)\,\bar{e}''$ und $p_1(0)\,\bar{e}''$ und zweitens r innere Punkte gemeinsam, die durch Schnitt der Sehnen $p_1(\varkappa)\, p_3(\varkappa)$ mit K entstehen. Der Rand von E_3 hat in $p_1(0)$ einen Doppelpunkt, durch den er in die beiden Teile $\bar{K}_1''$ und $p_1(0)\,\bar{e}'' + \bar{K}_3'' + \bar{e}''\, p_1(0)$ zerlegt wird. Der eine dieser beiden Teile, nämlich $\bar{K}_1''$, berandet ein Element E_4, das mit K nur den Randpunkt $p_1(0)$ gemeinsam hat. Um das zu beweisen, deuten wir eine Gerade $\mathfrak{G}$ mit einem sie umgebenden (beiderseits unbeschränkten) Vollzylinder $\mathfrak{Z}$ als universellen Überlagerungsraum des geschlossenen Polygons K samt einer Torusumgebung U von K; $\bar{K}_1''$ möge ganz in U enthalten sein. Da $\bar{K}_1$ auf K, also $\bar{K}_1''$ in U stetig auf den Punkt $p_1(0)$ zusammengezogen werden kann, entspricht der Kurve $\bar{K}_1''$ in $\mathfrak{Z}$ ein System von miteinander äquivalenten *geschlossenen* Kurven. $\bar{\mathfrak{K}}_1''$ sei eine solche Kurve in $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{p}_1(0)$ der auf $\mathfrak{G}$ gelegene Punkt von $\bar{\mathfrak{K}}_1''$, der dem Punkt $p_1(0)$ von $\bar{K}_1''$ entspricht. $\bar{\mathfrak{K}}_1''$ hat — abgesehen von $\mathfrak{p}_1(0)$ — keinen Punkt mit $\mathfrak{G}$ gemeinsam. Die Gesamtheit der Strecken $\mathfrak{p}_1(0)\,\bar{\mathfrak{p}}_1''$ überstreicht also, wenn $\bar{\mathfrak{p}}_1''$ die Kurve $\bar{\mathfrak{K}}_1''$ durchläuft, ein von $\bar{\mathfrak{K}}_1''$ berandetes Element $\mathfrak{E}_4$, das bis auf den Randpunkt $\mathfrak{p}_1(0)$ zu $\mathfrak{G}$ fremd ist. In U entspricht dem Element $\mathfrak{E}_4$ ein Element E_4, das von $\bar{K}_1''$ berandet wird und nur den Randpunkt $p_1(0)$ mit K gemeinsam hat.

Ein von K berandetes Element E, das genau r Randsingularitäten besitzt, erhält man durch Zusammensetzen der Elemente E_1, E_2, E_3, E_4. In der Tat: E_1 wird berandet von $e'\,\bar{e} + K + \bar{e}\,\bar{e}' + \bar{K}_3'$ und besitzt keine Schnittpunkte mit K. Heftet man E_1 längs $\bar{K}_3'$ mit E_2 zusammen, so entsteht ein Element $E_1 + E_2$, das von $\bar{e}''\, e + K + \bar{e}\,\bar{e}'' + K_3''$ berandet wird und auch keine Schnittpunkte mit K aufweist. Heftet man längs $\bar{K}_3''$ an E_1 und E_2 das Element E_3 an, so wird $E_1 + E_2 + E_3$ berandet von $p_1(0)\,\bar{e} + \bar{K} + \bar{e}\, p_1(0) + \bar{K}_1''$, also von $K + \bar{K}_1''$, und die Anzahl der Schnittpunkte mit K ist genau gleich r. $E_1 + E_2 + E_3$ kann

gedeutet werden als ein von K berandetet Element mit einem von $\overline{K}_1''$ berandeten Loch; der Rand $\overline{K}_1''$ des Loches berührt dabei im Punkte $p_1(0)$ den Rand K des Elements. Das Loch wird schließlich ausgefüllt, indem man in $\overline{K}_1''$ das von $\overline{K}_1''$ berandete Element E_4 einheftet, das mit K nur den Randpunkt $p_1(0)$ gemeinsam hat; neue Randsingularitäten entstehen dabei nicht.

Zum Schluß ist noch zu zeigen, daß das Element E ohne Vermehrung der Randsingularitäten durch ein aus Dreiecken aufgebautes Element in allgemeiner Lage approximiert werden kann: E_1 kann von vornherein aus Dreiecken aufgebaut werden; die Approximation von E_2 durch ein Element, das mit K ebenfalls nur die beiden Randstrecken $\overline{e}'\,\overline{e}''$ und $\overline{\overline{e}}'\,\overline{\overline{e}}''$ gemeinsam hat, und die Approximation von E_4 durch ein Element, das von K nur in dem Randpunkt $p_1(0)$ getroffen wird, bereitet keine Schwierigkeiten; um E_3 ohne Vermehrung der Schnittpunkte mit K approximieren zu können, muß man — wie im Beweis des vorigen Hilfssatzes — wissen, daß die Schnittpunkte von K mit E_3 einfach sind. Zum Beweis der Einfachheit der Schnittpunkte führen genau dieselben Überlegungen wie bei dem Beweis des Hilfssatzes XV.

Hilfssatz XVII. Die Menge M_{13} enthält wenigstens k doppelpunktfreie Kurvenbogen $C_1, C_2, \ldots C_k$, die den folgenden Bedingungen genügen: (1) $C_\nu (\nu = 1, 2, \ldots, k)$ enthält außer den Endpunkten kein Paar bei einer Decktransformation äquivalenter Punkte; (2) die Endpunkte jedes C_ν entsprechen einander bei der Decktransformation $t_{\pm 1}$; (3) wenn durch einen Punkt x, y von M_{13} j Kurvenbogen hindurchgehen, die zu j verschiedenen C_ν oder damit äquivalenten Kurven gehören, so ist x, y ein wenigstens j-facher Punkt der Menge M_{13}.

Zum Beweis geht man ebenso vor wie bei dem Beweis des Hilfssatzes X. Dort wurde in der Tat nur benutzt, daß die Menge $M(AB, A)$ mit jedem zwei Punkte der Geraden $y = 0$ und $y = 1$ verbindenden Bogen mindestens so viele Schnittpunkte gemeinsam hat, wie Kurven C_ν konstruiert werden sollen, daß von jedem Komplementärgebiet von $M(AB, A)$ aus alle Punkte der Gebietsgrenze erreichbar sind, und daß in jeder Komponente einer solchen Gebietsgrenze je zwei Punkte durch einen Bogen verbunden werden können. Dagegen ist die Abgeschlossenheit (die der Menge M_{13} nicht zukommt) nicht benutzt worden. Die drei genannten, für den Beweis wesentlichen Eigenschaften bleiben für die Menge M_{13} erhalten, wenn man der Definition der Komponente den Hausdorffschen Begriff des Zusammenhanges[23]) zugrunde legt. Demnach sind die Schlüsse des Beweises von Hilfssatz X auch hier anwendbar;

[23]) Vgl. F. Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre (1914), S. 244.

dabei tritt jetzt Hilfssatz XVI an die Stelle des Hilfssatzes IX. Die einzige Modifikation besteht darin, daß die Menge G der in bezug auf M_{13} mit der Geraden $y = 0$ verbindbaren Punkte jetzt nicht notwendig ein Gebiet ist; für C_1^* ist dann diejenige Komponente der Menge der von G aus erreichbaren Punkte von M_{13} zu nehmen, die $y = 0$ von $y = 1$ trennt.

Beweis des Hauptsatzes II. Der Beweis der Behauptung, daß der Durchschnitt M_{123} von M_{12} und M_{13} wenigstens k^2 Punkte enthält, — und damit der Beweis des Hauptsatzes II — ergibt sich aus Hilfssatz XVII und Hilfssatz XV: Jeder der k nach Hilfssatz XVII in M_{13} ausgewählten Kurvenbogen C_ν schneidet nach Hilfssatz XV die Menge M_{12} in wenigstens k Punkten, so daß man in der Tat k^2 Schnittpunkte von M_{12} und M_{13} erhält. Die Verschiedenheit der Schnittpunkte im Sinne der Festsetzungen über die Vielfachheiten ergibt sich — wie bei dem Beweis des Hauptsatzes I — aus den speziellen Eigenschaften der C_ν.

Lebenslauf

Am 26. Mai 1904 wurde ich, Erika Pannwitz, in Hohenlychen (Provinz Brandenburg), als Tochter des Arztes Dr. Karl Pannwitz und seiner Frau Else, geb. Wegener, geboren. Ich bin preußischer Staatsangehörigkeit und evangelischer Konfession.

Bis zur Untersekunda besuchte ich die Pannwitz-Freiluft-Schule in Hohenlychen, dann bis zur Reifeprüfung, die ich im Februar 1922 bestand, die Studienanstalt gymnasialer Richtung an der Staatlichen Augusta-Schule in Berlin. Im Sommersemester 1922 begann ich mit dem Studium der Mathematik an der Universität Berlin, der ich bis zum Wintersemester 1924/25 und dann vom Wintersemester 1925/26 bis zum Sommersemester 1926 angehörte. Im Sommersemester 1925 studierte ich in Freiburg i. Br., im Sommersemester 1928 in Göttingen. Im Juni 1927 bestand ich in Berlin die wissenschaftliche Prüfung für das Lehramt an höheren Schulen in den Fächern Mathematik, Physik, Chemie.

Während meines Studiums habe ich mich an Vorlesungen und Übungen der folgenden Professoren und Dozenten beteiligt: Alexandroff, Ansel, Bieberbach, Blasius, Born, Courant, Einstein, Feigl, Hamburger, Hammerstein, Heffter, Herglotz, Hilbert, H. Hopf, W. Jaeger, v. Laue, Löwner, Loewy, v. Mises, O. Neugebauer, E. Noether, Planck, P. Pringsheim, Rubens, E. Schmidt, Schlenck, I. Schur, Szegö, v. d. Waerden.

Meinen Universitätslehrern, besonders den Herren Professor Dr. Bieberbach, Professor Dr. H. Hopf, Professor Dr. E. Schmidt und Professor Dr. I. Schur, bin ich zu großem Dank verpflichtet.